COMPLEMENTI di ANALISI MATEMATICA 02/02/2018	COGNOME e Nome firma

1. *(5 punti)* Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + e^x y^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

specificando l'intervallo di esistenza della soluzione.

2.*(6 punti)* Discutere al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ esistenza e unicità della soluzione del problema ai limiti

$$\begin{cases} y'' - \lambda y' + \lambda^2 y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

3.*(5 punti)* Determinare gli estremi assoluti della funzione $x^2 - z$ in $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1\}$.

4.*(4 punti)* Provare che il sistema di equazioni

$$\begin{cases} xy + \log(x + z) = 0 \\ \\ 2e^{xz} - y = 0 \end{cases}$$

definisce un'unica funzione implicita $\vec{g}(y) = (x(y), z(y))$ in un intorno del punto $P(0, 2, 1)$. Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva $\vec{\gamma}(y) = \big(x(y), y, z(y)\big)$ in P.

5.*(5 punti)* Scrivere la serie di Fourier della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 4-periodica, dispari, tale che

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \in [0, 1] \\ \\ 0 & x \in]1, 2] \end{cases}$$

Determinare la somma della serie. Sapendo che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, determinare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

6.*(5 punti)* Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3 - xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

stabilire se è continua in $(0, 0)$, differenziabile in $(0, 0)$ e se ammette derivate direzionali in $(0, 0)$.