COMPLEMENTI di ANALISI MATEMATICA 20/02/2018	COGNOME e Nome firma

1. (*5 punti*) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^3y''' - 3xy' + 3y = x\log^2 x \\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0,\ y''(1) = 0 \end{cases}$$

specificando l'intervallo di esistenza della soluzione.

2.(*6 punti*) Trovare l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} x' = -x + y - z \\ y' = 2x + y \\ z' = 3x + z \end{cases}$$

3.(*4 punti*) Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = x^2+y^2-3xy$ in $\mathbb{R}^2$ e classificarli. Trovare poi gli estremi assoluti di f in $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2-x\}$.

4.(*5 punti*) Determinare le estremali del funzionale

$$J(x) = \int_0^{+\infty} (4x - x^2 - \dot{x}^2 + 2\dot{x})e^{-t}\,dt$$

nella classe $C^1([0,+\infty[)$ e classificarle.

5.(*5 punti*) Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-periodica, tale che $f(x) = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$ per $x \in [0,1]$

- scrivere la serie di Fourier di f
- discutere la convergenza puntuale e totale della serie
- determinare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

6.(*5 punti*) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\, e^{\frac{xy}{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stabilire se è continua in $(0,0)$, differenziabile in $(0,0)$. Calcolare le derivate direzionali in $(1,0)$ lungo qualunque versore.