Ex 1

$$f(x,y) = e^{xy} + e^{\frac{x^2}{|x|+|y|}}$$

dom $f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (bisogna imporre $|x|+|y| \neq 0$)

Siccome e^{xy} è continua in $\mathbb{R}^2$, la prolungabilità di f in $(0,0)$ dipende da $e^{\frac{x^2}{|x|+|y|}}$.

Osserviamo che

$$0 \leq \frac{x^2}{|x|+|y|} = \frac{|x|}{|x|+|y|} \cdot |x| \leq |x|$$

$\to 0$ per $x \to 0$, $y \to 0$

Pertanto $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{|x|+|y|} = 0$

Ne segue che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 2$

ed è possibile prolungare f con continuità in tutto $\mathbb{R}^2$ ponendo $f(0,0) = 2$.

Siccome $x>0$ e $y>0$ in un intorno di $(1,1)$, per il calcolo delle derivate parziali di f in $(1,1)$ (che richiedono solo i valori di f vicino a $(1,1)$) possiamo scrivere

$$f(x,y) = e^{xy} + e^{\frac{x^2}{x+y}}$$

(x,y) vicino a $(1,1)$

Da qui si vede facilmente che l'eq. del piano tangente è:

$$z = e+\sqrt{e} + \left(e+\frac{3}{4}\sqrt{e}\right)(x-1) + \left(e-\frac{1}{4}\sqrt{e}\right)(y-1)$$

Ex 2

$$F(x,y) = y - \log x + \log y$$

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y>0\}$$

$F\in C^1(A)$

$F(e,1)=0$

$\partial_y F = 1+\frac{1}{y}$; $\partial_y F(e,1) = 2 \neq 0$

$\Rightarrow \exists!\ y(x)$ definita in un intorno di $x=e$, di classe C^1, t.c.

$y(e)=1$

$F(x,y(x))=0$

Quindi: $\quad y(x) - \log x + \log y(x) = 0$

Derivando risp. a x: $\quad y' - \frac{1}{x} + \frac{y'}{y} = 0$

da cui $\quad y' = \frac{y}{x(y+1)}$ $\quad$ Eq. diff. in forma normale

Ex 3 $\quad y' = ty + t^3y^2$

Eq. di Bernoulli. $\underline{y=0 \text{ è soluzione}}$,

Poniamo $\quad z = \frac{1}{y} \quad$ e trasformiamo l'eq:

$$z' = -tz - t^3$$

$$z' + tz = -t^3$$

$$\frac{d}{d}\left(z e^{t^2/2} \right) = -t^3 e^{t^2/2}$$

$$z(t) e^{t^2/2} = c - \int t^3 e^{t^2/2} dt$$

$$\int t^3 e^{t^2/2} dt = \int t^2 \left(e^{t^2/2}\right)' dt = t^2 e^{t^2/2} - \int 2t e^{t^2/2} dt$$

$$= t^2 e^{t^2/2} - 2 e^{t^2/2}$$

$$\Rightarrow \quad z(t) = c e^{-t^2/2} - t^2 + 2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y(t) = \frac{1}{c e^{-t^2/2} - t^2 + 2} \qquad c \in \mathbb{R}}$$

Ex 4

$$f(x,y) = \frac{2}{y^2} + \log(xy) + \frac{1}{x}$$

A è un insieme aperto, cerchiamo solo estremi liberi

$$\nabla f = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, -\frac{4}{y^3} + \frac{1}{y}\right)$$

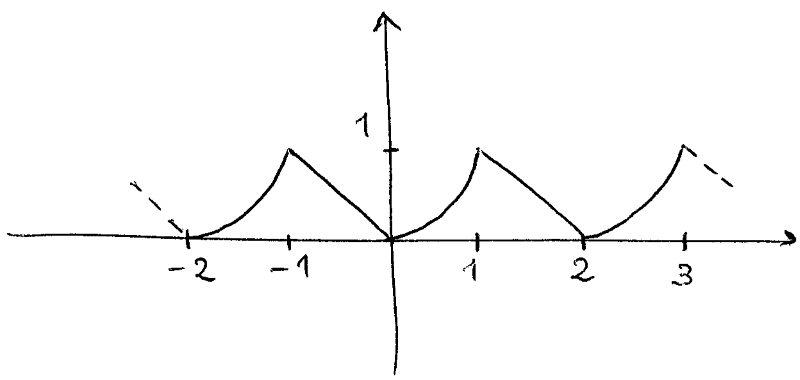
$$\nabla f = (0,0) \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

L'unico punto stazionario in A è $P(1,2)$

$$Hf(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ è def. positiva $\Rightarrow$ P è

punto di min relativo stretto.

Ex 5



f

$T = 2$

$\omega = \pi$

f è continua in $\mathbb{R}$ e regolare a tratti

$$a_k = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(\pi k x)\,dx \quad ; \quad b_k = \int_{-1}^{1} f(x)\,\text{sen}(\pi k x)\,dx$$

$$a_0 = \frac{5}{6}$$

$$a_k = \frac{3(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}$$

$$b_k = -\cancel{\frac{2(-1)^k}{k\pi}} + \frac{2(-1)^k}{(k\pi)^3} - \frac{2}{(k\pi)^3}$$

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\pi x) + b_k \operatorname{sen}(k\pi x)$$

Per le proprietà di f : $s(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

In particolare $s(0) = 0$ da cui

$$0 = \frac{5}{12} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3(-1)^k}{k^2\pi^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2\pi^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{\pi^2}{3}\left(-\frac{5}{12} + \frac{1}{\pi^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}_{=\frac{\pi^2}{6}}\right)$$

$$= -\frac{\pi^2}{12}$$

Ex 6 :

$$J(x) = \int_0^1 \dot{x}^2 e^{-\dot{x}}\, dt$$

$$x(0)=0, \quad x(1)=1$$

$$f(t,x,\dot{x}) = \dot{x}^2 e^{-\dot{x}}$$

$$f_x = 0 \quad ; \quad f_{\dot{x}} = 2\dot{x}e^{-\dot{x}} - \dot{x}^2 e^{-\dot{x}}$$

$$\left(\frac{d}{dt} f_{\dot{x}}\right) - f_x = 0 \iff \frac{d}{dt}\left(2\dot{x}e^{-\dot{x}} - \dot{x}^2 e^{-\dot{x}}\right) = 0$$

$$\iff 2\ddot{x}\, e^{-\dot{x}} - 2\dot{x}e^{-\dot{x}}\ddot{x} - 2\dot{x}\ddot{x}e^{-\dot{x}} + \dot{x}^2 e^{-\dot{x}}\ddot{x} = 0$$

$e^{-\dot{x}} \neq 0$ sempre

$$\Downarrow$$

$$2\ddot{x} - 4\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}^2\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x}\left(2 - 4\dot{x} + \dot{x}^2\right) = 0$$

legge di annullamento del prodotto : $\ddot{x} = 0$ $\vee$ $2 - 4\dot{x} + \dot{x}^2 = 0$

$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \boxed{x(t) = at + b}$ $a, b \in \mathbb{R}$

$\dot{x}^2 - 4\dot{x} + 2 = 0$ eq. algebrica di grado 2 in $\dot{x}$

$$\dot{x} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = (2+\sqrt{2})t + c} \quad \vee \quad \boxed{x(t) = (2-\sqrt{2})t + d}$$

Imponendo le cond. agli estremi, si vede che l'unica estremale è $x(t) = t$.