COMPLEMENTI di ANALISI MATEMATICA 31/03/2017	COGNOME e Nome firma

1. (*6 punti*) Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, esistenza e unicità della soluzione del seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} ty'' - \dfrac{k^2}{t}y = t^2 \\ y\left(\dfrac{1}{e}\right) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Determinare esplicitamente le soluzioni, quando esistono.

2.(*5 punti*) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$y^{(iv)} - y'' = \sin x + x$$

3.(*5 punti*) Determinare eventuali estremi relativi o assoluti della funzione $f(x,y) = 3x^2y - y^3$ nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x^2 - y^2 \leq 0\}$.

4.(*5 punti*) Provare che l'equazione $e^{x+y+z} - ax^2 - x - y - 2z = 0$, con $a \neq 0$, definisce un'unica funzione implicita $g(x,y)$ in un intorno del punto $(0,-1,1)$. Dire se il punto $(0,-1)$ è di estremo per g.

5.(*5 punti*) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione dispari, 4-periodica tale che $f(x) = x(2-x)$ in $[0,2]$. Scrivere la serie di Fourier di f e studiarne la convergenza puntuale e totale. Dedurre lo sviluppo di Fourier della funzione $g(x)$ pari, 4-periodica tale che $g(x) = 2(1-x)$ in $[0,2]$.

6.(*4 punti*) Determinare e classificare le estremali del funzionale

$$J(x) = \int_0^2 (4+t^2)\dot{x}^2 dt$$

nella classe $\mathcal{U} = \{x \in C^1[0,2] \,|\, x(0) = 0, x(2) = 2\}$. Cosa cambia nella classe $\mathcal{U}' = \{x \in C^1[0,2] \,|\, x(0) = 0\}$?