Esercizio 1

Risolvo l'eq. diff. (di Eulero). L'eq. caratteristica è:

$$\alpha(\alpha-1)-2\alpha+2=0 \longrightarrow \alpha^2-3\alpha+2=0 \longrightarrow \alpha_{1/2}=1,2$$

L'integrale generale è $y(x)=c_1 x+c_2 x^2$.

Impongo le cond. ai limiti:

$$y'(x)=c_1+2c_2 x$$

$$\begin{cases} y(1)+\lambda y'(1)=0 \\ y(3)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1+c_2+\lambda(c_1+2c_2)=0 \\ 3c_1+9c_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+\lambda)c_1+(1+2\lambda)c_2=0 \\ 3c_1+9c_2=0 \end{cases}$$

La matrice del sistema è $\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1+2\lambda \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ il cui determinante è $6+3\lambda$

λ autovalore $\iff 6+3\lambda=0 \iff \lambda=-2$

In corrisp. di $\lambda=-2$ le autofunzioni sono

$$y(x)=-3c_2 x+c_2 x^2, \qquad c_2\in\mathbb{R}$$

Se $\lambda\neq-2$ l'unica sol. del pb ai limiti è $y=0$.

Esercizio 2

La matrice del sistema diff. è $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 5 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+4\lambda+13=0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -2 \pm 3i$$

Trovo un autovettore per $\lambda_1 = -2+3i$:

$$\begin{pmatrix} 2-(-2+3i) & -5 \\ 5 & -6-(-2+3i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-3i)u - 5v = 0 \\ 5u - (4+3i)v = 0 \end{cases}$$

$$u = \frac{4+3i}{5} v$$

Un autovettore è $\begin{pmatrix} 4+3i \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{w}_1$

Un autovettore relativo a $\lambda_2 = -2-3i$ è il coniugato del precedente e quindi:

$$\begin{pmatrix} 4-3i \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{w}_2$$

L'integrale generale del sistema è

$$c_1 \vec{w}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{w}_2 e^{\lambda_2 t}$$

oppure, per avere soluzioni a valori reali:

$$c_1 \, \mathrm{Re}(e^{\lambda_1 t} \vec{w}_1) + c_2 \, \mathrm{Im}(e^{\lambda_1 t} \vec{w}_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 4\cos 3t - 3 \operatorname{sen} 3t \\ 5\cos 3t \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 4 \operatorname{sen} 3t + 3\cos 3t \\ 5 \operatorname{sen} 3t \end{pmatrix}$$

Imponendo $x(0)=1$, $y(0)=1$ si trova

$$c_1\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} c_1 = 1/5 \\ c_2 = \frac{1}{15}\end{array}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}(t)\\ \tilde{y}(t)\end{pmatrix} = e^{-2t}\begin{pmatrix}\cos 3t - \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t \\ \cos 3t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t\end{pmatrix}$$

Esercizio 3

Per provare che f è continua in $(0,0)$ occorre far vedere che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

$$\underbrace{f(x,y)}_{\text{coord. polari}} = \frac{\rho^3\cos^3\theta\,\cos(\rho\operatorname{sen}\theta)}{\rho} = \rho^2\cos^3\theta\,\cos(\rho\operatorname{sen}\theta)$$

$$|f(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)| \leq \rho^2 \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0 \implies$$ f è continua in $(0,0)$.

$$f(x,0) = \frac{x^3}{|x|} = \begin{cases} x^2 & x>0 \\ -x^2 & x<0\end{cases}$$

Derivata dx e sx di $f(x,0)$ in $x=0$ sono entrambe nulle, pertanto $\frac{d}{dx}f(x,0)\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$

$$f(0,y)=0 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

f è diff.^{le} in $(0,0)$ $\iff$

$$\iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

$$\iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3\cos y}{x^2+y^2}=0$$

$$\left|\frac{x^3\cos y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{\rho^3\cos^3\theta\cos(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)}{\rho^2}\right| \leq \rho \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$$

$\Rightarrow$ f è diff.^{le} in $(0,0)$.

Esercizio 4

La funzione f è continua in D che è compatto, quindi ammette massimo e minimo assoluti, per il T. di Weierstrass.

Cerchiamo i punti stazionari di f interni a D:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{y} = 0 & \to \text{imp.} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2} = 0 \end{cases}$$

non esistono punti stazionari per f

Per gli estremi vincolati di f a ∂D, usiamo i moltipl. di Lagrange:

$$\mathcal{L} = \frac{x}{y} - \lambda\left(x^2+(y-2)^2-1\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \dfrac{1}{y} - 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2} - 2\lambda(y-2) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -[x^2 + (y-2)^2 - 1] = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{y} = 2\lambda x \\ -\dfrac{x}{y^2} = 2\lambda(y-2) \\ x^2 + (y-2)^2 = 1 \end{cases}$$

Se $x=0$, ~~non può essere soluzione~~ la prima equazione è impossibile.

Se $y=2$, la seconda eq. implica $x=0$ che è impossibile.

Quindi possiamo assumere $x \neq 0$ e $y \neq 2$ e moltiplicare la I eq. per $(y-2)$ e la II per x e ottenere:

$$\begin{aligned} \frac{y-2}{y} &= 2\lambda x(y-2) \\ -\frac{x^2}{y^2} &= 2\lambda x(y-2) \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y-2}{y} = -\frac{x^2}{y^2}$$

Il sistema diventa

$$\begin{cases} y-2 = -\dfrac{x^2}{y} \\ \dfrac{1}{y} = 2\lambda x \\ x^2 + (y-2)^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = y(2-y) \\ \text{---} \\ y(2-y) + (y-2)^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1/2} = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \lambda = \dfrac{1}{2xy} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$$

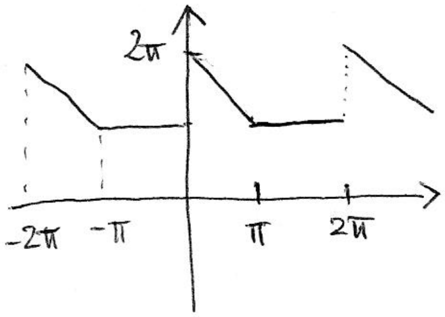
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$$

$P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ è punto di max

$P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ è punto di min

$$\max_D f = f(P_1) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad \min_D f = f(P_2) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ESERCIZIO 5



$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi\,\mathrm{sen}\,kx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(2\pi - x)\,\mathrm{sen}\,k x$$

$$= \dots = \frac{1}{k}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi\cos kx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(2\pi - x)\cos kx\,dx = \frac{1-(-1)^k}{\pi k^2}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{5}{2}\pi$$

$$f(x) \sim \frac{5}{4}\pi + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^k}{\pi k^2}\cos kx + \frac{1}{k}\,\mathrm{sen}\,kx$$

La somma della serie di Fourier di f è

$$s(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 2k\pi \\ \frac{3}{2}\pi & x = 2k\pi \end{cases}$$

Basta definire $f(x) = \frac{3}{2}\pi$ per $x=0$ (e per periodicità per $x = 2k\pi$) affinché $s(x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dall' uguaglianza di Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + b_k^2 \right\}$$

si ricava
$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{a_0^2}{2}$$

$$= \frac{5}{24}\pi^2$$

Ex 6

$f(x,y,z) = \operatorname{Ch}(xz) + \cos(xy) - yz = 0$

$f \in C^1(\mathbb{R}^3)$

$f(0,1,2) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,2) = -1 \neq 0$

$\underset{\text{T. Dini}}{\Longrightarrow}$ l'eq. $f(x,y,z)=0$ definisce un'unica funzione $z(x,y)$ in un intorno di $(0,1)$ t.c.

$z \in C^1$

$z(0,1) = 2$

$f(x,y,z(x,y)) = 0$

Per l'eq. del piano tangente occorre $\nabla z(0,1)$

$$\frac{e^{xz(x,y)} - e^{+xz(x,y)}}{2} + \cos(xy) - yz(x,y) = 0$$

Deriv. risp. a x e valutando in $(0,1)$ si ricava

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = 0$$

Deriv. risp. a y e valutando in $(0,1)$ si ottiene

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = -2$$

L'eq. del piano tg è $\quad z = 2 - 2(y-1)$

$$z = -2y + 4$$