<table>
<tr><td>COMPLEMENTI
di ANALISI MATEMATICA
02/02/2016</td><td>COGNOME e Nome   firma</td></tr>
</table>

1. Determinare autovalori e autofunzioni del seguente problema ai limiti omogeneo

$$\begin{cases} x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(1) + \lambda y'(1) = 0 \\ y(3) = 0 \end{cases}$$

Qual è l'unica soluzione per λ non autovalore?

2. Determinare l'integrale generale del seguente sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti

$$\begin{cases} x' = 2x - 5y \\ y' = 5x - 6y \end{cases}$$

Trovare la soluzione $(\tilde{x}, \tilde{y})$ tale che $\tilde{x}(0) = 1, \tilde{y}(0) = 1$.

3. Provare che la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \cos y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua in $(0,0)$. È derivabile in $(0,0)$? È differenziabile in $(0,0)$?

4. Determinare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y) = \frac{x}{y}$ in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$, dopo averne giustificato l'esistenza.

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica tale che

$$f(x) = \begin{cases} 2\pi - x & x \in (0, \pi] \\ \pi & x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

- Scrivere la serie di Fourier di f e discuterne la convergenza e la somma in ogni punto;
- completare la definizione di f in $x = 0$ affinché la serie converga a $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- calcolare $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$.

6. Provare che l'equazione $\cosh(xz) + \cos(xy) - yz = 0$, dove $\cosh(t) = (e^t + e^{-t})/2$, definisce implicitamente un'unica funzione $z = z(x,y)$ in un intorno del punto $P(0,1,2)$. Scrivere l'equazione del piano tangente in P al grafico di z.