COMPLEMENTI di ANALISI MATEMATICA 26/03/2018	COGNOME e Nome	firma

1. (*5 punti*) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$x^2y' + 2xy = 1$$

nell'intervallo $(0, +\infty)$. Provare che tutte le soluzioni sono infinitesime per $x \to +\infty$. Determinare la soluzione che soddisfa $y(2) = 2y(1)$.

2.(*5 punti*) Trovare l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} x' = -x + 4y + 2 + e^{3t} \\ y' = -x + 3y - 1 \end{cases}$$

e la soluzione particolare con $x(0) = 0, y(0) = 0$.

3.(*5 punti*) Provare che l'equazione $x^2 - x + y^2 + e^x - z + y^2e^z = 0$ definisce un'unica funzione implicita $g(x, y)$ in un intorno del punto $(0, 0, 1)$. Verificare che $(0, 0)$ è punto critico per g e classificarlo.

4.(*5 punti*) Determinare gli estremi assoluti di $f(x, y, z) = xy + 2z$ in $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 24\}$, giustificandone l'esistenza.

5.(*5 punti*) Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-periodica, tale che $f(x) = 1 - x^2$ per $x \in [0, 1)$

- scrivere la serie di Fourier di f;
- discutere la convergenza puntuale della serie e stabilirne la somma;
- determinare le somme delle serie numeriche $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ e $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

6.(*5 punti*) Data la funzione $f(x, y) = \log(2x^2 - 3y^2)$, determinarne il dominio e disegnarlo. Stabilire se f è di classe C^1 nel suo dominio. Stabilire se f è differenziabile nel suo dominio. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 0, \log 2)$.