COMPLEMENTI di ANALISI MATEMATICA 26/06/2017	COGNOME e Nome firma

1. *(6 punti)* Determinare l'integrale generale del sistema lineare non omogeneo $\vec{Y}' = A\vec{Y} + \vec{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix}$$

2.*(5 punti)* Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{x^2 - y^2}{xy + y^2}$$

3.*(4 punti)* Determinare gli estremi assoluti della funzione $f(x,y,z) = 4 - z$ sull'ellisse data dall'intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 8$ con il piano $x + y + z = 1$, dopo averne giustificato l'esistenza.

4.*(5 punti)* Provare che l'equazione $e^{xy} - xz^2 \log y = \pi$ definisce un'unica funzione implicita $g(y,z)$ in un intorno del punto $(\log \pi, 1, \sqrt{\pi})$. Dire se g è differenziabile in $(1, \sqrt{\pi})$ e calcolare il gradiente di g in $(1, \sqrt{\pi})$.

5.*(5 punti)* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2-periodica tale che $f(x) = |x-1| + 1$ in $[0,2]$. Scrivere la serie di Fourier di f e studiarne la convergenza puntuale e totale. Verificare che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

6.*(5 punti)* Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + xy + y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

dire se: (i) è continua in $(0,0)$; (ii) ammette derivate direzionali in $(0,0)$; (iii) è differenziabile in $(0,0)$.