COMPLEMENTI di ANALISI MATEMATICA 25/09/2017	COGNOME e Nome	firma

1. *(6 punti)* Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 4y = y^3 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quali α la soluzione è definita globalmente?

2. *(5 punti)* Data la matrice

$$Z(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

dire in quali intervalli essa rappresenta la matrice fondamentale di un sistema lineare omogeneo $\vec{Y}' = A(t)\vec{Y}$. Determinare quindi la matrice dei coefficienti $A(t)$, l'integrale generale del sistema e l'integrale particolare che assume il valore $(1,1)$ per $t = 0$.

3. *(5 punti)* Determinare gli estremi assoluti della funzione $3x^2 - 2y^2 + 3y$ in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq x, 4x^2 + y^2 \leq 4\}$.

4. *(5 punti)* Sia $\vec{F} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\vec{F}(x,y,z,t) = (x^2 + z^2 - 2yt, x^5 + z^5 - 2yt).$$

Provare che il sistema $\vec{F}(x,y,z,t) = \vec{0}$ definisce un'unica funzione implicita $\vec{\phi}(x,t) = (g_1(x,t), g_2(x,t))$ in un intorno del punto $(1,1,1,1)$. Calcolare $\partial_x g_1(1,1)$.

5. *(4 punti)* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 1-periodica tale che $f(x) = 1 - x$ in $(0,1]$. Scrivere la serie di Fourier di f e studiarne la convergenza puntuale. Dedurre la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

6. *(5 punti)* Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stabilire se è continua e differenziabile in $(0,0)$. Dire se esistono le derivate direzionali di f in $(0,0)$ lungo qualunque direzione.