| | |
|---|---|
| **COMPLEMENTI di ANALISI MATEMATICA** 25/01/2017 | COGNOME e Nome  firma |

**1.** (*6 punti*) Discutere, al variare di $\lambda > 0$, esistenza e unicità della soluzione del seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = \lambda \sin x \\ y(0) = 0 \\ y(2\pi) = 0 \end{cases}$$

Determinare esplicitamente le soluzioni, quando esistono.

**2.**(*6 punti*) Determinare l'integrale generale del seguente sistema lineare completo a coefficienti costanti

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^{2t} \\ y' = -x + 2y + e^{t} \end{cases}$$

**3.**(*5 punti*) Dire se la funzione $f(x,y) = \sqrt[6]{x^4(y-3)^2} + 3$ è differenziabile in $(0,3)$. Esistono le derivate direzionali in $(0,3)$ lungo tutte le direzioni?

**4.**(*4 punti*) Determinare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^2y + y^3 - y + 1$ e classificarli.

**5.**(*5 punti*) Determinare le estremali del funzionale

$$J(x) = \int_0^1 \left( \frac{x}{1+t^2} - \dot{x}^2 \right) dt$$

nella classe $\mathcal{U} = \{x \in C^1([0,1]) \mid x(0) = 0, x(1) = 0\}$. Classificarle.

**6.**(*4 punti*) Provare che l'equazione $y^2 e^{x^2} + z e^{yz} + x^2 + 2y - 3x = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $z = z(x,y)$ in un intorno del punto $(0,0,0)$. Scrivere l'equazione del piano tangente in $O$ al grafico di $z$.