Esercizio 1

Osserviamo che $\dfrac{\operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} = \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} y}{y} \cdot \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$

Inoltre

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \left|\rho^3 \frac{\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta}{\rho^2}\right| = \rho|\cos\theta \operatorname{sen}\theta| \leq \rho \to 0$$

Quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\right)\cdot\left(\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)\cdot\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right)$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 = f(0,0)$$

Dunque f è continua in $(0,0)$.

$$\begin{matrix} f(x,0)=0 \\ f(0,y)=0 \end{matrix} \implies \exists\ \nabla f(0,0) = (0,0)$$

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen} y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \cdot \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

In coord. polari:

$$\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\rho^3 \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta}{\rho^3} = \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta$$

Quindi $\dfrac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ non ammette limite per $(x,y)\to(0,0)$

e, di conseguenza, nemmeno $\dfrac{\operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen} y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

Esercizio 2

$$f(x,y) = xy - 2\cos(x-2y)$$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$f(2,1) = 0$

$\partial_y f(2,1) = 2 \neq 0$

$\xRightarrow{\text{Th. Dini}}$ $\exists!$ $y = g(x)$ definita in un intorno di $x_0 = 2$ t.c.

$g(2) = 1$

$f(x, g(x)) = 0$

$g \in C^1$

$$\partial_y f(x,y) = x - 4\,\mathrm{sen}(x-2y)$$

Derivando due volte l'eq. $x g(x) - 2\cos(x - 2g(x)) = 0$ e valutando in $x_0 = 2$ si trova:

$$x g'(x) + g(x) + 2\,\mathrm{sen}(x - 2g(x))\,(1 - 2g'(x)) = 0$$

$\hookrightarrow \quad 2g'(2) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad g'(2) = -\frac{1}{2}$

$$x g''(x) + 2g'(x) + 2\cos(x - 2g(x))\,[1 - 2g'(x)]^2 + $$
$$+ 2\,\mathrm{sen}(x - 2g(x))\,[-2g''(x)] = 0$$

$\hookrightarrow \quad 2g''(2) - 1 + 2 \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad g''(2) = -\frac{7}{2}$

Sv. di Taylor

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)(x-x_0)^2 + o(x-x_0)^2$$
$$= 1 - \frac{1}{2}(x-2) - \frac{7}{4}(x-2)^2 + o(x-2)^2$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{g(x) - 1}{\operatorname{arctg}(x-2)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

De L'Hopital: $\dfrac{g'(x)}{\dfrac{1}{1+(x-2)^2}} \longrightarrow -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ il limite

richiesto è $-\frac{1}{2}$.

Esercizio 3

Scriviamo l'eq. di Eulero - Lagrange:

$$f(t, x, \dot{x}) = e^{2t}(\dot{x}^2 + 3x^2)$$

$$f_x = 6xe^{2t}$$

$$f_{\dot{x}} = 2\dot{x}e^{2t}$$

$$\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} - f_x = e^{2t}\left(4\dot{x} + 2\ddot{x} - 6x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0$$

Si tratta di un'eq. lineare del II ordine omogenea a coeff costanti. L'eq. caratt. è

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

e ammette $\lambda_{1/2} = 1, -3$ come radici.

Pertanto l'int. generale è $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-3t}$

Dobbiamo imporre le condizioni:

$x(0) = 2$ (affinché $x \in \mathcal{U}$)

e $\lim_{t\to+\infty} f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) = 0$ (*) (cond. di trasversalità)

$x(0)=2 \iff \boxed{c_1+c_2=2}$

$$f_{\dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t)) = 2e^{2t}\dot{x}(t) = 2e^{2t}\left(c_1e^{t}-3c_2e^{-3t}\right)$$
$$= 2c_1e^{3t}-6c_2e^{-t}$$

(*) $\iff \boxed{c_1=0}$

Quindi l'unica estremale è $\hat{x}(t) = 2e^{-3t}$

La matrice hessiana di f rispetto alle variabili $x, \dot{x}$ è:

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{x\dot{x}} \\ f_{x\dot{x}} & f_{\dot{x}\dot{x}} \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

È def. positiva $\Rightarrow$ f è convessa strett. in $(x,\dot{x})$

$\Rightarrow \hat{x}$ è l'unica minimante.

Esercizio 4

$$f(x,y) = \frac{1-x+y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Occorre determinare gli estremi liberi di f.
Calcoliamo ∇f.

$$\partial_x f = \frac{-\sqrt{1+x^2+y^2} - (1-x+y)\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{1+x^2+y^2}$$

$$= \frac{-1-\cancel{x^2}-y^2 - x + \cancel{x^2} - xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\partial_y f = \frac{\sqrt{1+x^2+y^2} - (1-x+y)\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{1+x^2+y^2}$$

$$= \frac{1+x^2+\cancel{y^2} - y + xy - \cancel{y^2}}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\nabla f = \vec{0} \iff \begin{cases} -1-y^2-x-xy=0 \\ 1+x^2-y+xy=0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 1+xy = -y^2-x \\ 1+xy = y-x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+xy = -y^2-x \\ -y^2-x = y-x^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1+xy = -y^2-x \\ y^2-x^2+x+y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{———} \\ (y-x)(y+x)+(y+x)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \text{———} \\ (x+y)(y-x+1)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{———} \\ y=-x \quad \vee \quad y=x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-\cancel{x^2} = -\cancel{x^2}-x \\ y=-x \end{cases} ; \quad \begin{matrix} x=-1 \\ y=1 \end{matrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 1+x^2-\cancel{x} = -x^2+2x-1-\cancel{x} \\ y=x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 = 0 & \text{imp.} \\ y = x - 1 \end{cases}$$

L'unico punto stazionario è $(-1, 1)$

$$\partial^2_{xx} f = \frac{(-1-y)(1+x^2+y^2)^{3/2} + (1+y^2+x+xy)\frac{3}{\cancel{2}}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cancel{2}x}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$\partial^2_{xx} f(-1,1) = \frac{-2 \cdot 3^{3/2} + 0}{3^3} = -\frac{2\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{27}_9} = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

$$\partial^2_{xy} f = \frac{(-2y-x)(1+x^2+y^2)^{3/2} + (1+y^2+x+xy)\frac{3}{\cancel{2}}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cancel{2}y}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$\partial^2_{xy} f(-1,1) = \frac{-1 \cdot 3^{3/2} + 0}{3^3} = -\frac{\sqrt{3}}{9}$$

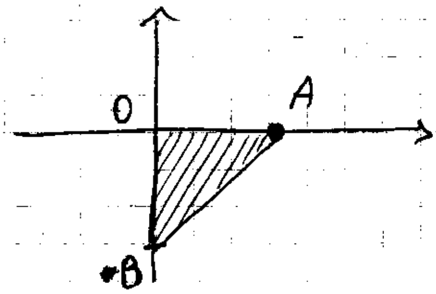
$$\partial^2_{yy} f = \frac{(-1+x)(1+x^2+y^2)^{3/2} - (1+x^2-y+xy)\frac{3}{2}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$\partial^2_{yy} f(-1,1) = \frac{-2 \cdot 3^{3/2} - 0}{3^3} = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

$$\mathcal{H}f(-1,1) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9}\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{9} \\ -\frac{\sqrt{3}}{9} & -\frac{2}{9}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \det = \frac{4}{\cancel{81}_{27}} \cdot \cancel{3}^1 - \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{81}_{27}} = \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{27}_9} > 0 \\ a_{11} < 0 \end{array}\right] \Rightarrow (-1,1) \text{ pto di max}$$

Infine, nel triangolo T



non ci sono punti stazionari interni e sulla frontiera usiamo il metodo parametrico

su OA : $y=0 \quad 0 \leq x \leq 1$

$$h(x) = f(x,0) = \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$h'(x) = \frac{-\sqrt{1+x^2} - (1-x)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{-1-x^2-x+x^2}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{-1-x}{(1+x^2)^{3/2}} < 0 \quad \text{in } [0,1]$$

i punti candidati sono gli estremi O e A

su OB $\quad x=0 \quad -1 \leq y \leq 0$

$$g(y) = f(0,y) = \frac{1+y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$g'(y) = \frac{\sqrt{1+y^2} - (1+y)\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}}{1+y^2} = \frac{1+\cancel{y^2}-y-\cancel{y^2}}{(1+y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1-y}{(1+y^2)^{3/2}} > 0 \quad \text{in } [-1,0]$$

i punti candidati sono gli estremi O e B

su AB $\quad f=0$

$f(A) = f(B) = 0, \ f(O) = 1$

In conclusione $\min_T f = 0$ e tutti i punti del segmento AB sono di minimo

$$\max_T f = 1 = f(0,0).$$

Esercizio 5

Risolviamo l'eq. lineare a coeff. costanti

$$t^2 + (2-\lambda)t + \left(1-\lambda+\tfrac{1}{2}\lambda^2\right) = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{\lambda-2 \pm \sqrt{-\lambda^2}}{2} = \frac{\lambda-2}{2} \pm i\,\frac{\lambda}{2}$$

Se $\lambda \neq 0$ l'int. generale è:

$$y(x) = c_1 e^{\frac{\lambda-2}{2}x}\cos\left(\tfrac{\lambda}{2}x\right) + c_2 e^{\frac{\lambda-2}{2}x}\operatorname{sen}\left(\tfrac{\lambda}{2}x\right)$$

Se $\lambda = 0$ l'int. generale è:

$$y(x) = c_1 e^{\frac{\lambda-2}{2}x} + c_2 x e^{\frac{\lambda-2}{2}x}$$

Imponiamo le cond. ai limiti:

$\boxed{\lambda \neq 0}$

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_1 e^{\frac{\lambda-2}{2}}\cos\frac{\lambda}{2} + c_2 e^{\frac{\lambda-2}{2}}\operatorname{sen}\frac{\lambda}{2} = e^{2\pi-1} \end{cases}$$

matrice del sistema
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{\frac{\lambda-2}{2}}\cos\frac{\lambda}{2} & e^{\frac{\lambda-2}{2}}\operatorname{sen}\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}$$

con determ $= e^{\frac{\lambda-2}{2}}\operatorname{sen}\frac{\lambda}{2} = 0 \iff \operatorname{sen}\frac{\lambda}{2} = 0$

$\iff \frac{\lambda}{2} = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \iff \lambda_k = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

Con questa scelta di λ_k il sistema algebrico diventa

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ e^{k\pi - 1}(-1)^k = e^{2\pi - 1} \end{cases}$$

che è compatibile solo per $k=2$; ~~mentre~~ ~~altri~~

Quindi

$\lambda_2 = 4\pi$ è autovalore con autosoluzioni

$$y(x) = e^{(2\pi-1)x}\cos(2\pi x) + c_2\, e^{(2\pi-1)x}\operatorname{sen}(2\pi x)$$

Per gli altri λ_k non ci sono autofunzioni

$\boxed{\lambda=0}$

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_1 e^{\frac{\lambda-2}{2}} + c_2 e^{\frac{\lambda-2}{2}} = e^{2\pi-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_1 e^{-1} + c_2 e^{-1} = e^{2\pi} - 1 \end{cases}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{-1} & e^{-1} \end{pmatrix} = e^{-1} \neq 0 \implies \lambda = 0 \text{ non è autovalore}$$

<u>Esercizio 6</u>

$$z = y^2$$

$$z' = 2yy' = 2y\left(\frac{y}{x} + \frac{x^2\cos x}{y}\right) = \frac{2y^2}{x} + 2x^2\cos x$$

$$= \frac{2z}{x} + 2x^2\cos x$$

$$z' - \frac{2}{x} z = 2x^2 \cos x$$

$$A(x) = \int -\frac{2}{x}\,dx = -2\log|x| = -\log x^2$$

$$e^{A(x)} = e^{-\log x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^2} z\right)' = 2\cos x$$

$$\frac{1}{x^2} z(x) = \int 2\cos x\,dx + c$$

$$\frac{1}{x^2} z(x) = +2\,\mathrm{sen}\,x + c$$

$$z(x) = 2x^2\,\mathrm{sen}\,x + c x^2$$

$$y(x) = \pm\sqrt{2x^2\,\mathrm{sen}\,x + c x^2}$$