COMPLEMENTI di ANALISI MATEMATICA 24/02/2016	COGNOME e Nome	firma

1. Provare che la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2 \sin y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua in $(0,0)$ ma non è differenziabile in $(0,0)$.

(**Sugg**: *può essere utile ricordare il limite notevole* $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$).

2. Provare che l'equazione $xy - 2\cos(x-2y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $y = g(x)$ in un intorno del punto $P(2,1)$. Inoltre

- scrivere lo sviluppo di Taylor del secondo ordine di g di centro $x_0 = 2$;
- calcolare $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x)-1}{\arctan(x-2)}$.

3. Si consideri il seguente funzionale

$$J(x) = \int_0^{+\infty} e^{2t}(\dot{x}^2 + 3x^2)dt.$$

Calcolare le estremali di J nella classe $\mathcal{U} = \{x \in C^1[0,+\infty) | x(0) = 2\}$ e stabilirne la natura.

4. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = \frac{1-x+y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Determinare massimo e minimo assoluti di f nel triangolo di vertici $A(1,0)$, $B(0,-1)$ e O.

5. Determinare autovalori e autofunzioni del seguente problema ai limiti completo ($\lambda \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} y'' + (2-\lambda)y' + \left(1-\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2\right)y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(1) = e^{2\pi-1} \end{cases}$$

6. Determinare l'integrale generale della seguente equazione di Bernoulli

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2\cos x}{y}.$$