COMPLEMENTI di ANALISI MATEMATICA Appello del 22/06/2016	COGNOME e Nome	Firma

1. Stabilire se la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x^2\,y+2y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

- è continua in $(0,0)$;
- è differenziabile in $(0,0)$;
- ammette derivata direzionale in $(0,0)$ lungo il vettore $\vec{v}=(1,1)$.

2. Verificare che l'equazione $2x^3+y^3+z^4-xy-2x=0$ definisce implicitamente un'unica funzione $x=x(y,z)$ di classe C^∞ in un intorno del punto $P(1,0,0)$. Calcolare le derivate seconde della funzione implicita così ottenuta nel punto $(0,0)$.

3. Calcolare le estremali del seguente funzionale

$$J(x)=\int_1^2 t^3\dot{x}^2dt.$$

nella classe $\mathcal{U}=\left\{x\in C^1([1,2])\,\middle|\,x(1)=4,\,x(2)=1,\,\int_1^2 xdt=2\right\}$.

4. Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+4xy+2y^2+4x$$

e classificarli. Trovare poi gli estremi assoluti di f nell'insieme compatto

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,-2\leq x\leq-\frac{1}{2}y^2\right\}.$$

5.
- Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di soli seni della funzione 2π-periodica definita in $(0,\pi]$ da $f(x)=\pi/2$.
- Studiare la convergenza puntuale della serie.
- Usare lo sviluppo ottenuto per determinare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

6. Determinare la matrice $\mathbf{A}(t)$, $t>0$, del sistema differenziale lineare del primo ordine $\mathbf{Y}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{Y}(t)$, sapendo che $(1,t)$ e $(-t,\frac{1}{t})$ sono due soluzioni particolari. Scrivere poi l'integrale generale del sistema non omogeneo $\mathbf{Y}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{Y}(t)+\mathbf{f}(t)$, dove $\mathbf{A}(t)$ è la matrice ottenuta prima e $\mathbf{f}(t)=\big(0,t(t^3+1)\big)$.