COMPLEMENTI di ANALISI MATEMATICA 22/02/2017	COGNOME e Nome	firma

1. (*6 punti*) Discutere, al variare di λ, esistenza e unicità della soluzione del seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} y'' - 2\lambda y' + \lambda^2 y = e^{-2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

Determinare esplicitamente le soluzioni, quando esistono.

2.(*5 punti*) Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy, precisandone l'intervallo di esistenza:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x-3} y = \dfrac{1}{x+1} y^2 \\ y(0) = \dfrac{4}{3\log 3} \end{cases}$$

3.(*5 punti*) Dire se la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4 - y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua e differenziabile in $(0,0)$. Calcolare la derivata direzionale di f in $(0,1)$ lungo la direzione $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

4.(*5 punti*) Determinare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y) = e^{(y-1)^2}\left(\dfrac{x^2}{2} - x\right)$ nel quadrato di vertici $(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$.

5.(*5 punti*) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 4-periodica tale che

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \in [0,1] \\ 0 & x \in [1,3] \\ (x-3)^2 & x \in [3,4] \end{cases}$$

Scrivere la serie di Fourier di f e studiarne la convergenza puntuale e totale. Sapendo che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calcolare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

6.(*4 punti*) Sia $y(x)$ la funzione definita implicitamente dall'equazione $x^2 + x(y^2 - 1) + y(y^2 + 1) = 0$ in un intorno di $x = 1$. Calcolare

$$\lim_{x \to 1} \frac{y(x) + x - 1}{(x-1)^2}.$$