ESERCIZIO 1

$$f(x,y) = \frac{1-x^2}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}}$$

$$x^2+y^2-2x+1 = (x-1)^2+y^2 \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

dom f : $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$.

Occorre studiare $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{1-x^2}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}}$ (*)

Se consideriamo $y=0$

$$f(x,0) = \frac{1-x^2}{\sqrt{(x-1)^2}} = \frac{1-x^2}{|x-1|} = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x-1} & x>1 \\ \frac{1-x^2}{1-x} & x<1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -(x+1) & x>1 \\ 1+x & x<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x,0) = -2 \neq \lim_{x\to 1^-} f(x,0) = 2$$

Pertanto il limite (*) non esiste.

Ne segue che f non può essere estesa con continuità in $\mathbb{R}^2$. Non conoscendo $f(1,0)$ non possiamo discutere l'esistenza delle derivate parziali in $(1,0)$.

Esercizio 2

La funzione $\vec{F}(x,y,z) = \left(\sin(x+yz)+z^2-1,\ \cos\left(y-\frac{\pi}{2}\right)+2xy\right.$

è di classe C^1 in $\mathbb{R}^3$.

$\vec{F}(0,0,1) = (0,0)$

$$\mathrm{Jac}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} \cos(x+yz) & z\cos(x+yz) & y\cos(x+yz)+2 \\ 2yz & -\sin\left(y-\frac{\pi}{2}\right)+2xz & 2xy \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Jac}\,\vec{F}(0,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante $\neq 0$

T. Dini $\Rightarrow$ $\exists$ U intorno di $z_0 = 1$ ed esiste

un'unica coppia di funzioni $(x(z), y(z))$

definite in un intorno di $z_0 = 1$ t.c.

$(x(1), y(1)) = (0,0)$

$\vec{F}(x(z), y(z), z) = (0,0) \quad \forall z \in U$

Inoltre $x(z), y(z)$ sono di classe C^1 in U

e

$$\begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In particolare $x'(1) = -2$

Il $\lim_{t\to 1} \dfrac{x(t)}{t^2-1}$ è in forma ind. $\dfrac{0}{0}$

App. il T. di De L'Hopital calcoliamo

$$\lim_{t\to 1} \frac{x'(t)}{2t} = \frac{x'(1)}{2} = -1$$

Pertanto, anche il limite richiesto vale -1.

ESERCIZIO 3

$$y'' - 3y' + 2y = te^{2t} + 2 \qquad (1)$$

- Integrale generale dell' omogenea:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda_{1/2} = 2, 1$$

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t$$

- Soluzione particolare dell'eq. completa

Per il principio di sovrapposizione:

$$y_p(t) = t(At+B)e^{2t} + C$$

Imponendo che questa funzione sia soluz. dell' eq. (1) si trova $A = 1/2$, $B = -1$, $C = 1$

Pertanto, l' integrale generale dell' eq. completa è

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^t + \left(\frac{1}{2}t^2 - t\right)e^{2t} + 1$$

A questa soluzione imponiamo le cond. iniziali:

e troviamo $\quad c_1 = 1, \quad c_2 = -1.$

La soluz. del Problema di Cauchy è:

$$y = e^{2t} - e^{t} + \left(\frac{1}{2}t^2 - t\right)e^{2t} + 1$$

ESERCIZIO 4

$$f = 2x^2 - y^2 - 2z \qquad V = \{x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$$

V è compatto, f è continua $\xRightarrow{\text{Teorema di Weierstrass}}$

f ammette massimo e minimo assoluti in V

Punti stazionari interni a V non esistono in quanto

$\nabla f = (4x, -2y, -2)$ non si annulla mai.

Per la frontiera $x^2+y^2+z^2 = 4$, usiamo il metodo dei moltip. di Lagrange:

$$\mathcal{L} = 2x^2 - y^2 - 2z - \lambda(x^2+y^2+z^2-4)$$

$$\nabla \mathcal{L} = \vec{0} \iff \begin{cases} 2x(2-\lambda)=0 \longrightarrow x=0 \ \vee \ \lambda=2 \\ 2y(1+\lambda)=0 \\ \lambda z = -1 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \ \vee \ \lambda=-1 \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ \lambda = -\frac{1}{z} \\ z = \pm 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ \lambda=-1 \\ z=1 \\ y=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 2 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2} \\ x = \pm\frac{\sqrt{15}}{2} \end{cases}$$

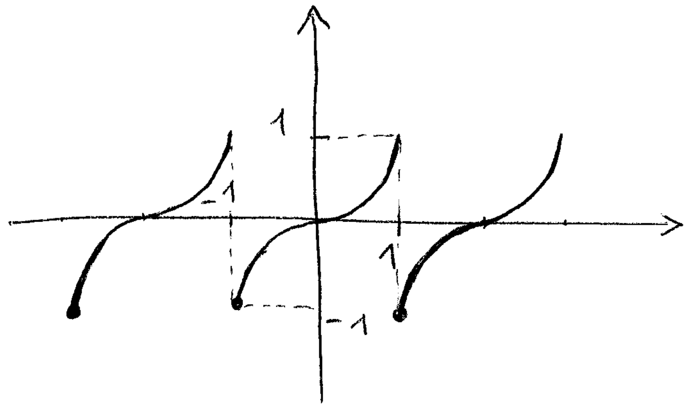
I punti stazionari vincolati sono :

$$(0,0,\pm 2)$$
$$(0,\pm\sqrt{3},1)$$
$$\left(\pm\frac{\sqrt{15}}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\max_V f = f\left(\pm\frac{\sqrt{15}}{2},0,-\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{2}$$

$$\min_V f = f(0,\pm\sqrt{3},1) = -5$$

ESERCIZIO 5



f è dispari $\Longrightarrow a_k = 0$

$$b_k = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{sen}(\pi k x)\,dx = 2\int_0^1 x^2\,\mathrm{sen}(\pi k x)\,dx$$

$$= \cdots = \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} + \frac{4}{\pi^2 k^2}\,\frac{(-1)^k - 1}{k\pi}$$

La serie di Fourier di f è :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} + \frac{4}{k^2\pi^2}\cdot\frac{(-1)^k-1}{k\pi}\right)\mathrm{sen}(k\pi x)$$

Indichiamo con la somma della serie

Allora

$$s(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{R} \setminus \{2k+1, k \in \mathbb{Z}\} \\ 0 & x \in \{2k+1, k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

Se scegliamo $x = \frac{1}{2}$ allora $s(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$ ossia

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} + \frac{4}{k^2\pi^2} \cdot \frac{(-1)^k - 1}{k\pi} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & k = 2n \\ (-1)^n & k = 2n+1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2(-1)^n}{\pi(2n+1)} + \frac{4(-2)(-1)^n}{\pi^3(2n+1)^3} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{\pi} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}}_{= \frac{\pi}{4}} - \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{-\pi^3}{8} = \frac{\pi^3}{32}$$

ESERCIZIO 6

Scriviamo esplicitamente il sistema diff.

$$\begin{cases} x' = 7x \\ y' = 7y + z \\ z' = 7z \end{cases} \qquad (x(t), y(t), z(t)) = U_1$$

Siccome A è una matrice triangolare, possiamo risolvere il sist. con il metodo di eliminazione.

$$x' = 7x \implies x(t) = c_1 e^{7t} \qquad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$z' = 7z \implies z(t) = c_2 e^{7t} \qquad c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y' = 7y + c_2 e^{7t} \implies y(t) = c_3 e^{7t} + c_2 t e^{7t}, \quad c_3 \in \mathbb{R}$$