COMPLEMENTI di ANALISI MATEMATICA 19/09/2018	COGNOME e Nome firma

1. (*5 punti*) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t}\cos t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

2.(*5 punti*) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$x^3 y''' + xy' - y = x(\log x + 1).$$

nell'intervallo $x > 0$.

3.(*5 punti*) Determinare massimo e minimo assoluti di $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ in $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

4.(*5 punti*) Provare che l'equazione $(x^2+z^2)\sin(\pi xy/2)+yz^2-3 = 0$ definisce univocamente una funzione $x(y, z)$ in un intorno del punto $(1, 1, -1)$. Calcolare $\dfrac{\partial x}{\partial y}$, $\dfrac{\partial x}{\partial z}$ e $\dfrac{\partial^2 x}{\partial y \partial z}$ in $(1, -1)$.

5.(*5 punti*) Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-periodica tale che $f(x) = (x - 1)^2$, per $x \in [0, 1)$. Studiare la convergenza puntuale della serie. Determinare le somme delle serie numeriche $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ e $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

6.(*5 punti*) Stabilire se la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è continua in $(0, 0)$. Calcolare $\nabla f(0, 0)$. Studiare la derivata direzionale di f in $(0, 0)$ lungo $\vec{u} = \dfrac{\vec{\imath} + \vec{\jmath}}{\sqrt{2}}$.
f è differenziabile in $(0, 0)$?