COMPLEMENTI **di ANALISI MATEMATICA** 18/07/2017	COGNOME e Nome firma

1. *(5 punti)* Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 13y = e^{-2t}\cos(3t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

2.*(6 punti)* Determinare autovalori e autofunzioni del problema ai limiti

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2\lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

3.*(4 punti)* Calcolare le estremali del funzionale

$$J(x) = \int_0^1 (\dot{x}^2 + 10tx)dt,$$

nella classe $\{x \in C^1([0,1]) \,|\, x(0) = 1, x(1) = 2\}$. Classificarle.

4.*(5 punti)* Provare che l'equazione $e^{xy} - \sin(xy) - y = 0$ definisce un'unica funzione implicita $g(x)$ in un intorno del punto $(0,1)$. Scrivere la formula di MacLaurin di g del secondo ordine e stabilire la natura del punto $x_0 = 0$.

5.*(5 punti)* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica tale che $f(x) = |x - \frac{\pi}{2}|$ in $[0, 2\pi]$. Scrivere la serie di Fourier di f e studiarne la convergenza puntuale. Usando lo sviluppo ottenuto e sapendo che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, determinare la somma di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

6.*(5 punti)* Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\log(x^2 + y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stabilire che è continua in $(0,0)$. Determinare eventuali estremi in $\mathbb{R}^2$.