$\boxed{1}$ $0 \leqslant \left| \dfrac{x^2 y}{x^2+y^4} \right| = \dfrac{x^2 \, |y|}{x^2+y^4} = \dfrac{x^2}{x^2+y^4} \cdot |y| \leqslant 1 \cdot |y| \longrightarrow 0$

$\underset{\text{Teorema di confronto (dei carabinieri)}}{\Longrightarrow}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow f$ è cont. in $(0,0)$

$$f(tv_1, tv_2) = \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4} = \frac{t\, v_1^2 v_2}{v_1^2 + t^2 v_2^4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + t^2 v_2^4} =$$

$$= \begin{cases} 0 & v_1 = 0 \\ v_2 & v_1 \neq 0 \end{cases}$$

In particolare $\nabla f(0,0) = (0,0)$

f non può essere differenziabile in $(0,0)$ poiché non vale la formula del gradiente:

$$\nabla f(0,0) \cdot \vec{v} \neq \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$$

$\boxed{2}$ $\vec{F}(x,y,z) = \left(x+y-z^3\,,\; x^3+y^3-z\right)$

- $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è di classe C^1
- $\vec{F}(0,1,1) = (0,0)$

$$\mathrm{Jac}\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3z^2 \\ 3x^2 & 3y^2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Jac}\vec{F}(0,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- $\mathrm{Jac}_{y,z}\vec{F}(0,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ha determinante $\neq 0$

Quindi, per il T. di Dini, esiste un'unica funzione $\vec{g}(x) = (y(x), z(x))$ definita implicitamente dall'eq. vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = \vec{0}$ in un intorno di $(0,1,1)$:

$$\vec{g} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \;,\quad I \text{ intorno di } x_0 = 0$$

t.c.

$\vec{g} \in C^1(I)$ e $\vec{g}\,'(x) = -\left[\mathrm{Jac}_{y,z}\vec{F}(x,y(x),z(x))\right]^{-1} \mathrm{Jac}_x F(x,\vec{g}($

$\vec{g}(0) = (1,1)$

$\vec{F}(x, y(x), z(x)) = \vec{0}, \quad \forall x \in I$

In particolare:

$$\vec{g}\,'(0) = -\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

In forma parametrica la retta tangente a $\vec{\gamma}$ in $(0,1,1)$ ha equazione

$$(x,y,z) = (0,1,1) + t\,\vec{\gamma}\,'(0)$$
$$= (0,1,1) + t\left(1, \tfrac{1}{8}, \tfrac{3}{8}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t\frac{1}{8} \\ z = 1 + \frac{3}{8}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y - 8 - x = 0 \\ 8z - 8 - 3x = 0 \end{cases}$$

3]

$$f_x = 8x \qquad f_{\dot{x}} = 2\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} - f_x = 0 \iff 2\ddot{x} - 8x = 0 \iff \ddot{x} - 4x = 0$$

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

integrale generale dell' eq. di Eulero-Lagrange

c. all' estremo $t = 1$: $x(1) = 1 \iff c_1 e^{2} + c_2 e^{-2} = 1$

c. all' estremo $t = -1$: $\underbrace{f_{\dot{x}}(-1, x(-1), \dot{x}(-1))}_{\substack{\parallel \\ 2\dot{x}(-1)}} = 0$

$$\dot{x}(t) = 2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t}$$

$$\dot{x}(-1) = 0 \iff 2c_1 e^{-2} - 2c_2 e^{+2} = 0$$

$$\begin{cases} c_1 e^{2} + c_2 e^{-2} = 1 \\ 2e^{-2} c_1 - 2e^{+2} c_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = \dfrac{e^{4}}{e^{6}+e^{-2}} \\ c_2 = \dfrac{1}{e^{6}+e^{-2}} \end{cases}$$

L'unico estremale è $\hat{x}(t) = \dfrac{e^{4+2t} + e^{-2t}}{e^{6}+e^{-2}}$

$f_{xx} = 8$

$f_{x\dot{x}} = 0$

$f_{\dot{x}\dot{x}} = 2$

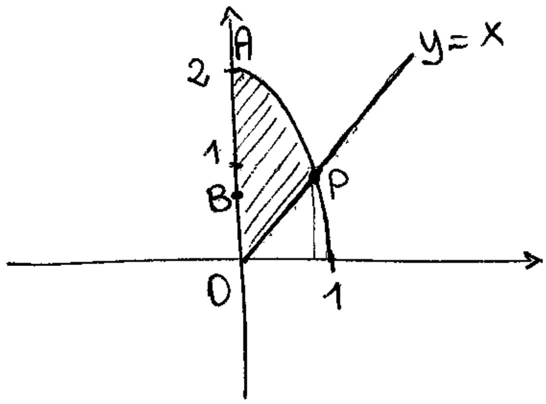
$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ è def. positiva

$\Rightarrow$ $f(t, x, \dot{x})$ è strett. convessa rispetto a $(x, \dot{x})$

$\Rightarrow$ $\hat{x}$ è (l'unica) minimante

$\boxed{4}$ $f = 3x^2 - 2y^2 + 3y$

E :



$$\begin{cases} x = y \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{ punto di intersez. nel I quadrante}$$

$$\nabla f = (6x, -4y+3) = (0,0) \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

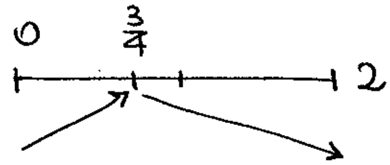
Tale punto stazionario non è interno a E su $\overline{OP}$: $h(x)=f(x,x)=x^2+3x$ $\qquad x\in\left[0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$

$h'=2x+3>0$ in $\left[0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$

gli estremi di h sono agli estremi O, P

su $\overline{OA}$: $g(y)=f(0,y)=-2y^2+3y$ $\qquad y\in[0,2]$

$g'=-4y+3\geq 0 \iff y<\frac{3}{4}$



occorre considerare i punti O, A e $B\left(0,\frac{3}{4}\right)$

su $\widehat{AP}$: $k(y)=f\left(x^2=1-\frac{y^2}{4}\right)=3\left(1-\frac{y^2}{4}\right)-2y^2+3y$

$y\in\left[\frac{2}{\sqrt{5}},2\right]$

$k'(y)=-\frac{3}{2}y-4y+3=-\frac{11}{2}y+3\geq 0 \iff y\leq\frac{6}{11}$

occorre considerare gli estremi A, P

$\frac{6}{11}>\frac{2}{\sqrt{5}} \iff$

$3\sqrt{5}>11$ NO!

quindi $\frac{6}{11}<\frac{2}{\sqrt{5}}$ ✓

In definitiva:

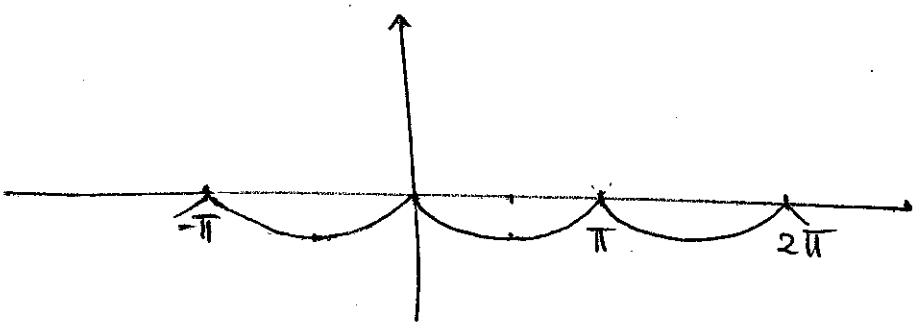
$f(O)=0$

$f(A)=-2$ min

$f(B)=\frac{9}{8}$

$f(P)=\frac{4}{5}+\frac{6}{\sqrt{5}}$ max

5. Definiamo f in $\mathbb{R}$, estendendo $x^2-\pi x$ in modo pari all'intervallo $[-\pi,0]$ e poi con periodicità 2π in tutto $\mathbb{R}$:



f è pari, continua in $\mathbb{R}$ e C^1 a tratti in $[-\pi,\pi]$.

$$a_0 = -\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2-\pi x)\cos(kx)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[(x^2-\pi x)\frac{\operatorname{sen} kx}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(2x-\pi)\frac{\operatorname{sen} kx}{k}\,dx\right\}$$

$$= -\frac{2}{\pi k}\left\{\left[-\frac{\cos kx}{k}(2x-\pi)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\cos kx}{k}\,2\,dx\right\}$$

$$= -\frac{2}{\pi k}\left\{-\frac{\cos \pi k}{k}\pi + \frac{1}{k}(-\pi) + \frac{2}{k}\left[\frac{\operatorname{sen} kx}{k}\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{2}{k^2}\left\{1+(-1)^k\right\} = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & k=2n \\ 0 & k=2n+1 \end{cases}$$

$$b_k = 0$$

$$f(x) \sim> -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cos(2nx)$$

La serie di Fourier converge puntualmente a $f(x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, per le proprietà di f evidenziate prima.

Per la convergenza totale, basta osservare che

$$\left| \frac{1}{n^2} \cos(2nx) \right| \leq \frac{1}{n^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Pertanto la serie di Fourier converge totalmente in $\mathbb{R}$.

$\boxed{6}$

$$y'' - 3y' + 2y = 10\cos x + e^x$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda_{1/2} = 1, 2$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \quad \text{int. gen. eq. omogenea}$$

Cerchiamo

$$z_p(x) = A e^{ix} + Bxe^x \qquad A \in \mathbb{C},\ B \in \mathbb{R}$$

soluz. part. di

$$z'' - 3z' + 2z = 10e^{ix} + e^x$$

Imponendo che z_p soddisfi l'eq:

$$z_p'' - 3z_p' + 2z_p = -Ae^{ix} + 2Be^x + Bxe^x - 3Ai\,e^{ix}$$
$$-3Be^x - 3Bxe^x + 2Ae^{ix} + 2Bxe^x$$
$$= 10e^{ix} + e^x$$

$$\iff \begin{cases} -A - 3Ai + 2A = 10 \\ 2B - 3B = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1 + 3i \\ B = -1 \end{cases}$$

$$y_p(x) = \operatorname{Re}\left((1+3i) e^{ix} \right) - xe^x$$
$$= \cos x - 3\,\mathrm{sen}\,x - xe^x$$

Imponendo infine le c.i. si determina la soluz. del PdC:

$$y(x) = e^{x} + e^{2x} + \cos x - 3\,\mathrm{sen}\,x - x e^{x}$$