COMPLEMENTI di ANALISI MATEMATICA Appello straordinario 16/03/2016	COGNOME e Nome	Firma

1. Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\,y}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- è continua in $(0,0)$;
- ammette derivate direzionali in $(0,0)$ lungo qualunque direzione $\vec{v}$;
- è differenziabile in $(0,0)$.

2. Verificare che il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x+y-z^3=0 \\ x^3+y^3-z=0 \end{cases}$$

è univocamente risolubile rispetto a y e z in un intorno della radice $(0,1,1)$. Siano $y(x)$ e $z(x)$ le componenti della funzione implicita determinata. Posto $\vec{\gamma}(t) = (t, y(t), z(t))$, determinare la retta tangente a $\vec{\gamma}$ nel punto $(0,1,1)$.

3. Si consideri il seguente funzionale

$$J(x) = \int_{-1}^{1} (\dot{x}^2 + 4x^2)dt.$$

Calcolare le estremali di J nella classe $\mathcal{U} = \{x \in C^1[-1,1] | x(1) = 1\}$ e stabilirne la natura.

4. Determinare massimo e minimo assoluti di

$$f(x,y) = 3x^2 - 2y^2 + 3y$$

nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq x, 4x^2 + y^2 \leq 4\}$.

5. Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di soli coseni della funzione 2π-periodica definita in $[0,\pi]$ da $f(x) = x^2 - \pi x$. Studiare quindi la convergenza puntuale e totale della serie.

6. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 10\cos x + e^x \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$