COMPLEMENTI di ANALISI MATEMATICA 11/07/2016	COGNOME e Nome	Firma

1. Stabilire se la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

- è continua in $(0,0)$;
- è differenziabile in $(0,0)$;
- ammette piano tangente in $(1,1)$ e, in caso affermativo, determinarne l'equazione.

2. Verificare che l'equazione $xy^2+xz-y^3+\arctan z=2$ definisce implicitamente un'unica funzione $z=\varphi(x,y)$ di classe C^∞ in un intorno del punto $(1,-1)$. Calcolare la derivata direzionale di φ nel punto $(1,-1)$ lungo la direzione individuata da $\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$.

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=2(t+1)y^{\frac{2}{3}} \\ y(1)=1 \end{cases}$$

specificando l'insieme di definizione della soluzione.

4. Determinare gli estremi della funzione

$$f(x,y,z)=xyz$$

nel dominio $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x\geq0,y\geq0,z\geq0\}$.

5.
- Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier della funzione 4-periodica definita in $[-2,2)$ da $f(x)=3+\frac{1}{2}x$.
- Studiare la convergenza puntuale della serie.
- Usare lo sviluppo ottenuto per verificare che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

6. Studiare il seguente problema ai limiti

$$\begin{cases} t^3z''+3t^2z'+tz=-1, & t\in[1,e] \\ \lambda z(1)+z'(1)=0, \\ z(e)=1 \end{cases}$$

al variare di $\lambda\in\mathbb{R}$, individuando eventuali autovalori e relative autofunzioni.