Soluzioni della prova del 12/02/20

Parte A

A1. Grazie alle stime asintotiche notevoli, il termine generale della serie è asintotico a $\dfrac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ per $n \to +\infty$. La serie $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ converge se $\alpha - \dfrac{1}{2} > 1$, ossia per $\alpha > \dfrac{3}{2}$. Per il criterio del confronto asintotico anche la serie data converge per $\alpha > \dfrac{3}{2}$

A2. La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin x - \cos(2x)$ ammette il seguente sviluppo per $x \to 0$

$$f(x) = \frac{1}{x}\Big(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\Big) - \Big(1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2)\Big) = 1 - \frac{1}{6}x^2 - 1 + 2x^2 + o(x^2) = \frac{11}{6}x^2 + o(x^2)$$

Per $x = \dfrac{1}{n^2}$ si ha $n^2 \sin\dfrac{1}{n^2} - \cos\left(\dfrac{2}{n^2}\right) \sim \dfrac{11}{6}\dfrac{1}{n^4}$, per $n \to +\infty$. Al denominatore invece:

$$e^{6/n^4} - 1 \sim \frac{6}{n^4}$$

per $n \to +\infty$. Pertanto il limite precedente è pari a $\dfrac{11}{36}$.

A3. Dalle stime asintotiche per le funzioni elementari si ha

$$x^3 \ln\left(\frac{x^4+1}{x^4}\right) = x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x^4}\right) \sim x^3 \frac{1}{x^4} = \frac{1}{x}$$
$$x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \sim x\frac{1}{x} = 1$$

per $x \to +\infty$. Pertanto il limite richiesto è $0 + 1 + 3 = 4$.

A4. Dal teorema di derivazione della funzione inversa risulta $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, con $y_0 = f(x_0)$. Con i dati del problema $y_0 = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ e $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 + \log_2 e$. Pertanto $g'(f\left(\dfrac{1}{2}\right)) = \dfrac{1}{1 + \log_2 e}$.

A5. Dalla formula risolutiva per la soluzione del problema di Cauchy per un'equazione lineare del primo ordine si ha

$$y(x) = \frac{5}{2}e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_1^x e^{A(t)} \frac{5}{t^2} dt,$$

con $A(x) = \displaystyle\int_1^x -\frac{2}{t^2} dt = \frac{2}{x} - 2$. Sviluppando i calcoli

$$\int_1^x e^{\frac{2}{t}-2} \frac{5}{t^2} dt = 5e^{-2} \int_1^x e^{\frac{2}{t}} \frac{1}{t^2} dt = -\frac{5}{2}e^{-2}\left[e^{\frac{2}{t}}\right]_1^x = -\frac{5}{2}e^{\frac{2}{x}-2} + \frac{5}{2}.$$

La soluzione è pertanto $y(x) = 5e^{-\frac{2}{x}+2} - \dfrac{5}{2}$.

A6. Con il cambio di variabile $x^2 = t$, $2xdx = dt$ si ha

$$\int x^3 \cos(x^2)dx = \int x^2 \cos(x^2)\ xdx = \frac{1}{2}\int t\cos(t)dt = \frac{1}{2}\left(t\sin t - \int \sin t dt\right)$$
$$= \frac{1}{2}(t\sin t + \cos t) = \frac{1}{2}\left(x^2\sin(x^2) + \cos(x^2)\right).$$

A7. Dai calcoli diretti, risulta $f(1) = \ln 5, f'(1) = \frac{1}{5}, f''(1) = -\frac{1}{25}$, da cui il polinomio richiesto è $f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = \ln 5 + \frac{1}{5}(x-1) - \frac{1}{50}(x-1)^2$.

A8. L'equazione si riscrive come $z^4(z^2 + 4i) = 0$, che ammette la soluzione nulla e le soluzioni di $z^2 + 4i = 0$, ossia $z^2 = -4i$, che sono date da $\pm\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$.

A9. L'equazione assegnata si riscrive come $\arctan\left(\frac{x+1}{x}\right) = (\lambda-7)\pi/2$. Il numero di soluzioni corrisponde al numero di intersezioni tra il grafico di $\arctan\left(\frac{x+1}{x}\right)$ e la retta orizzontale $y = (\lambda-7)\pi/2$. Si trova dunque 1 soluzione se $(\lambda-7)\pi/2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ e nessuna soluzione negli altri casi; pertanto una soluzione se $6 \le \lambda \le 8$ e $\lambda \ne \frac{15}{2}$, nessuna negli altri casi.

A10. Occorre studiare l'integrabilità della funzione $f(x) = \frac{e^{-2x}\sin^2 x}{(e^{7x}-1)^\alpha}$ vicino a 0. A tal proposito basta osservare che $f(x) \sim \frac{x^2}{(7x)^\alpha} = \frac{1}{7^\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-2}}$ per $x \to 0^+$ e che $\frac{1}{x^{\alpha-2}}$ è integrabile vicino a 0 se $\alpha - 2 < 1$, ossia per $\alpha < 3$. Per il criterio del confronto asintotico anche l'integrale dato converge per $\alpha < 3$.

Parte B

B1. $\boxed{\text{B}}$ per il Teorema di Lagrange.

B2. $\boxed{\text{B}}$ dal calcolo diretto si trova che $M_n = f(0) = 1$ per ogni n.

B3. $\boxed{\text{C}}$ definizione di limite.

B4. $\boxed{\text{D}}$ per il criterio della convergenza assoluta per serie.

B5. $\boxed{\text{D}}$ dalle proprietà della relazione $\sim$.

B6. $\boxed{\text{D}}$ scegliamo $x_0 \in (a, b)$ con $f(x_0) > 0$ e con la definizione di limite con $M = f(x_0)$ troviamo un intorno destro di a, $(a, a+\delta)$ e un intorno sinistro di b, $(b-\delta, b)$ in cui $f > f(x_0)$. Per il teorema di Weierstrass, esiste $x_1 \in [a+\delta, b-\delta]$ tale che $f(x) \geq f(x_1)$ per ogni $x \in [a+\delta, b-\delta]$. Sia $\bar{x}$ il punto tra x_0 e x_1 in cui f assume il valore più piccolo. Allora $\bar{x}$ è punto di minimo in tutto (a, b).

B7. $\boxed{\text{A}}$ Per le proprietà di estremo superiore ed estremo inferiore $\sup\limits_{\mathbb{R}} f \geq f(0) = 0$ e $\inf\limits_{\mathbb{R}} f \leq f(0) = 0$.

B8. $\boxed{\text{C}}$ Dalla definizione di limite si ha che $x^2|f(x)| \leq 1$ definitivamente per $x \to +\infty$, ossia $|f(x)| \leq \dfrac{1}{x^2}$. Per il criterio del confronto, essendo $\dfrac{1}{x^2}$ integrabile all'infinito, anche $|f(x)|$ lo è.

B9. $\boxed{\text{D}}$ $[f(g(x))]'' = [f'(g(x))g'(x)]' = f''(g(x))[g'(x)]^2 + f'(g(x))g''(x) \geq 0$, essendo $f'', g'', f' \geq 0$.

B10. $\boxed{\text{A}}$ un argomento di z è $-\pi/6$. Un argomento di z^{10} è $-\dfrac{10}{6}\pi = -\dfrac{5}{3}\pi$ che differisce da $\dfrac{\pi}{3}$ per un multiplo di 2π.