Soluzioni della prova del 23/01/20

Parte A

A1. La funzione $f(x) = \dfrac{x^{2+\alpha}}{e^{2\alpha x} + \arctan(7x)}$ è strettamente positiva e continua in $[2, +\infty)$. Se $\alpha > 0$, allora $f(x) \sim \dfrac{x^{2+\alpha}}{e^{2\alpha x}}$ per $x \to +\infty$ e $\dfrac{x^{2+\alpha}}{e^{2\alpha x}} \leq \dfrac{1}{x^2}$ per x grande. Siccome $\dfrac{1}{x^2}$ è integrabile all'infinito, per confronto e confronto asintotico anche $f(x)$ lo è.
Se $\alpha \leq 0$ allora $f(x) \sim \dfrac{x^{2+\alpha}}{c}$ per $x \to +\infty$, dove $c = 1 + \pi/2$ se $\alpha = 0$ e $c = \pi/2$ se $\alpha < 0$.
La funzione $x^{2+\alpha} = \dfrac{1}{x^{-2-\alpha}}$ è integrabile all'infinito se $-2 - \alpha > 1$ ossia per $\alpha < -3$. Così anche f è integrabile all'infinito per $\alpha < -3$.
In conclusione l'integrale dato converge se $\alpha > 0$ oppure $\alpha < -3$.

A2. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare dell'equazione completa è $\dfrac{1}{3}e^x$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione completa è $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x} + \dfrac{1}{3}e^x$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

A3. Studiando la funzione $g(x) = \dfrac{(x+3)(x-4)}{x^2}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, si trova $g'(x) = \dfrac{x^2 + 24x}{x^4} > 0$ se $x < -24$ oppure $x > 0$ e $g(-24) = 49/48$. Inoltre: $\lim_{x \to 0} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 1$ e $g(-3) = g(4) = 0$. rappresentando il grafico di g e poi quello di $f = |g|$ si trova che i punti $x = -3$ e $x = 4$ sono di minimo assoluto per f con $f(-3) = f(4) = 0$ e $x = -24$ è un punto di massimo locale con $f(-24) = 49/48$.

A4. Dagli sviluppi delle funzioni elementari si ha $\ln(1+t) - t - \cos t + 1 \sim \dfrac{1}{3}t^3$ per $t \to 0$. Pertanto $\ln(1 + \dfrac{2}{n}) - \dfrac{2}{n} - \cos\dfrac{2}{n} + 1 \sim \dfrac{1}{3}\dfrac{8}{n^3}$ per $n \to +\infty$. Inoltre $\sin(\dfrac{5}{n^3}) \sim \dfrac{5}{n^3}$ per $n \to +\infty$. Dunque il limite richiesto è $8/15$.

A5. Il numeratore è asintotico a $-2xe^{9x}$ per $x \to +\infty$, essendo $\dfrac{2}{x}\sin(x^2)$ infinitesima. Quindi la funzione completa è asintotica a $-2xe^{(9-\alpha)x}$ per $x \to +\infty$. Il limite richiesto è 0 se $\alpha > 9$ e $-\infty$ se $\alpha \leq 9$.

A6. Usiamo gli sviluppi delle funzione elementari:

$$f(x) = \Big(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - 1\Big)\Big(-2x + \frac{8x^3}{6} + o(x^3)\Big) = -2x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$$

per $x \to 0$. Si ha $f^{(4)}(0) = 24$.

A7. Osserviamo che, per la continuità di f^{-1}, se $y \to 0$ allora $f^{-1}(y) \to f^{-1}(0) = 0$. Pertanto

$$\lim_{y \to 0} \frac{f^{-1}(y)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(0)}{y - 0} = (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{6}.$$

A8. Una primitiva della funzione $\dfrac{\cos(7x)}{1 + \sin^2(7x)}$ è $\dfrac{1}{7}\arctan(\sin(7x))$. Dunque l'integrale vale $\pi/28$.

A9. Svolgendo i calcoli e ricordando che $z\bar{z} = |z|^2$, si trova $\dfrac{z^2}{|z|^2} + \dfrac{|z|^2}{z^2} = \dfrac{z}{\bar{z}} + \dfrac{\bar{z}}{z} = \dfrac{z^2 + \bar{z}^2}{|z|^2} = \dfrac{(1+2i)^2 + (1-2i)^2}{5} = -\dfrac{6}{5}$.

A10. Osserviamo che per $n \to +\infty$

$$n^\alpha + n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \cos\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \begin{cases} n^\alpha & \text{se } \alpha > 0 \\ 2 & \text{se } \alpha = 0 \\ 1 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

mentre il numeratore $\sim \dfrac{1}{n^{1/3}}$. La serie non converge se $\alpha \leq 0$. Per $\alpha > 0$, la serie converge se $\dfrac{1}{3} + \alpha > 1$, dunque $\alpha > 2/3$.

Parte B

B1. $\boxed{\text{C}}$ per il Teorema di Weiestrass.

B2. $\boxed{\text{C}}$ dal calcolo diretto.

B3. $\boxed{\text{A}}$ in quanto $\dfrac{f(x)g(x)}{x^{3/2}} \sim \dfrac{(\ln x)g(x)}{x^{1/2}} = x^{1/2}\ln x\, \dfrac{g(x)-g(0)}{x} \longrightarrow 0 \cdot g'(0) = 0$, per $x \to 0^+$.

B4. $\boxed{\text{A}}$ in quanto $f(x) = -\sqrt{g(x)}$ e si applica il teorema di derivazione della funzione composta.

B5. $\boxed{\text{A}}$ dallo studio del grafico di f.

B6. $\boxed{\text{B}}$ dal teorema della permanenza del segno per funzioni.

B7. $\boxed{\text{B}}$ è la condizione necessaria di convergenza per una serie numerica.

B8. $\boxed{\text{B}}$ essendo f monotona, esistono finiti il limite destro e il limite sinistro in 0. In particolare il limite destro è ℓ, perché è il limite su una successione che tende a 0 da destra.

B9. $\boxed{\text{C}}$ per il teorema della permanenza del segno per successioni.

B10. $\boxed{\text{A}}$ per il teorema degli zeri f ammette almeno uno zero che è un punto di minimo assoluto per $|f|$.