Proprietà della successione $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

- $\{a_n\}$ è strettamente crescente.
  Dobbiamo verificare che $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Usando la formula del binomio di Newton si ha
$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \\
&< \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) = a_{n+1}
\end{aligned}$$
  da cui la tesi.

- $\{a_n\}$ è limitata.
  Siccome $\{a_n\}$ è strettamente crescente, si ha $a_n > a_1 = 2$ per ogni $n \geq 2$. D'altra parte abbiamo riscritto a_n come
$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$
  Siccome $\left(1-\frac{m}{n}\right) < 1$ per ogni $m = 1, \dots, k-1$ risulta
$$a_n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$
  D'altra parte, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{k-1}$, per ogni $k \geq 1$. Quindi
$$a_n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1+2 = 3.$$
  Abbiamo usato la formula per la somma di una progressione geometrica $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$, per ogni $q \neq 1$. Pertanto
$$2 < a_n < 3, \qquad n \geq 2.$$

- $\{a_n\}$ è convergente.
  Per il teorema sulle successioni monotone, la successione $\{a_n\}$ ammette limite finito dato dal $\sup\{a_n\}$. Definiamo *numero di Nepero* e lo indichiamo con e tale estremo superiore:

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

  Da quanto provato precedentemente $2 < e \leq 3$.

∼∼∼∼∼

Le successioni $\{\sin(n)\}$ e $\{\cos(n)\}$ sono indeterminate. Supponiamo che esista $\lim_{n\to+\infty} \sin(n) = \sigma$. Dato che $\{\sin(n)\}$ è limitata, $\sigma \in \mathbb{R}$. Dalla formula di prostaferesi

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

scegliendo $p = n + 1$ e $q = n - 1$ si ricava

$$\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\cos(n)\sin(1)$$

e facendo tendere $n \to +\infty$

$$\sigma - \sigma = 2\sin(1) \cdot \lim_{n\to+\infty} \cos(n)$$

da cui deduciamo $\lim_{n\to+\infty} \cos(n) = 0$. Usando la relazione fondamentale $\sin^2(n) + \cos^2(n) = 1$ e facendo tendere $n \to +\infty$ si trova $\sigma^2 = 1$, da cui $\sigma = \pm 1$. Infine, con la formula di addizione

$$\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1)$$

facendo tendere $n \to +\infty$ si ha $\sigma = \sigma\cos(1)$ e quindi, dividendo per σ, $1 = \cos(1)$ che è assurdo! Concludiamo pertanto che non può esistere il limite di $\sin(n)$.
Lo studio della successione $\cos(n)$ è analogo.