Successioni

1 Verificare, usando la definizione, i seguenti limiti:

(a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

(b) $\lim_{n\to+\infty} \log \frac{1}{n} = -\infty$

(c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2}^-$

(d) $\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$

2 Provare che se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_1$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell_2$, con $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = \ell_1+\ell_2$.

3 Provare che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\ell|$$

(usare la disuguaglianza $\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$).
Far vedere che il viceversa non è vero, in generale, ad eccezione del caso in cui $\ell = 0$.

4 Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false

(a) Se $\{a_n\}$ è limitata allora $\{a_n\}$ è convergente. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(b) Se $\{a_n\}$ è convergente allora $\{a_n\}$ è limitata. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(c) Se $\{a_n\}$ è infinitesima e $a_n \neq 0$ allora $\{\frac{1}{a_n}\}$ è infinita. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(d) Se $\{a_n\}$ è infinitesima e $a_n > 0$ allora $\{\frac{1}{a_n}\}$ è infinita. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(e) Se $\{a_n\}$ è infinita e $a_n \neq 0$ allora $\{\frac{1}{a_n}\}$ è infinitesima. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(f) Se $\{a_n - b_n\}$ ha limite 0 allora $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ hanno lo stesso limite. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(g) Se $\{a_n\}$ è convergente allora $\{a_{n+1} - a_n\}$ è infinitesima. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(h) Se $\{a_n\}$ è monotona allora $\{a_n\}$ è convergente. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(i) Se $\{a_n\}$ è monotona e limitata allora $\{a_n\}$ è convergente. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(j) Se $\{a_n\}$ è divergente allora $\{a_n\}$ non è limitata. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(k) Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \ge a_n$ definitivamente allora $b_n \to +\infty$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(l) Se $a_n \to +\infty$ e $\{b_n\}$ è limitata inferiormente allora $a_n + b_n \to +\infty$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(m) Se $a_n \to -\infty$ e $b_n \le a_n$ definitivamente allora $b_n \to -\infty$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(n) Se $a_n \to \ell$, con $\ell \in \mathbb{R}$ e $b_n \ge a_n$ definitivamente allora $b_n \to \ell$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

5 Calcolare i seguenti limiti

(1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n+1} + 3(n+1)^{n+1}}{n^n + n!}$

(2) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+2)!n^{n-2}-(n-2)!n^{n+2}}{n^n\big((n-1)!+(n-2)!\log n\big)}$

(3) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{2}{\sqrt{n}}-n^{-\frac{7}{2}}+\frac{3}{n^{\frac{2}{5}}}}{4n^{-\frac{4}{3}}+3n^{-\frac{1}{4}}}$

(4) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n n^2+n}{n^2+1}$

(5) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^3+\cos n}{2n+(-1)^n}$

(6) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!-(n-1)!}{n+(n-2)!}$

(7) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2\sin n+\sin(n^2)}{n^2+1}$

(8) $\lim_{n\to+\infty} n-\sin n$

(9) $\lim_{n\to+\infty} 2^{n-2}-2^{\sqrt{n^2-1}}$

(10) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^{\frac{n}{2}}}$

(11) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2+\sin n}{n}$

(12) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n3^{n+1}+n^5+1)n!}{(3^n+2^n)(n+1)!}$

(13) $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n$

(14) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{e^{n^2}+4^n}{n!+n^n+5^n}$

(15) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n+\sin n\log n}{n}$

(16) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^{3n}+n!}{10^n-(3n)^n}$

(17) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4^n+1}}{2^n+1}$

(18) $\lim_{n\to+\infty} \cos n[\log(\sqrt{n}-1)-\log\sqrt{n-1}]$

(19) $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$

(20) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1-(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(21) $\lim_{n\to+\infty} n2^{-n}$

(22) $\lim_{n\to+\infty} n^2 2^{\frac{1}{n}}$

(23) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan n}{n+(-1)^n}$

(24) $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n^n+2}$

(25) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log^3 n + \sqrt[3]{n}}{n-n^2}$

(26) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n-1)}$

(27) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n^3-1)}{\log(3n^4-6)}$

(28) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$

(29) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{\sqrt{n}}}{2^{n^2}}$

(30) $\lim_{n\to+\infty} 2^{n^2} - 3^{\sqrt{n}}$

(31) $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{n}}$

Soluzioni

1. Ricordiamo che $a_n \sim b_n$ se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. In tal caso le due successioni si dicono asintotiche.
$$n - \sin n \sim n \longrightarrow +\infty$$

2. $$2^{n-2} - 2^{\sqrt{n^2-1}} = 2^{n-2}[1 - 2^{\sqrt{n^2-1}-(n-2)}]$$
Separatamente
$$\sqrt{n^2-1} - (n-2) = \frac{4n-5}{\sqrt{n^2-1}+(n-2)} \sim \frac{4n}{2n} \longrightarrow 2$$
Pertanto il limite richiesto è $-\infty$.

3. $$\frac{2^n - 4^n}{3^n - n!} \sim \frac{-4^n}{-n!} \longrightarrow 0.$$

4. Usiamo il **criterio del rapporto**:*se* $\{a_n\}$ *è una successione a termini positivi ed esiste* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ *allora* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$*, se* $\ell < 1$ *e* $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$*, se* $\ell > 1$.
$$\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{2^n n!}{n^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{e}{2} > 1$$
quindi il limite vale $+\infty$.

5. Ancora con il criterio del rapporto
$$\frac{(n+1)!}{n^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!} = \frac{n+1}{\sqrt{n}} \longrightarrow +\infty > 1.$$
Il limite richiesto è $+\infty$.

6. $$\frac{2+\sin n}{n} = \underbrace{(2+\sin n)}_{\text{limitata}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{infinitesima}} \longrightarrow 0.$$

7. $$\frac{(n3^{n+1}+n^5+1)n!}{(3^n+2^n)(n+1)!} \sim \frac{n3^{n+1}n!}{3^n(n+1)!} = \frac{3n}{(n+1)} \longrightarrow 3$$

8. $$\left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-n+2}{2n-2}}\right)^{\frac{n^2-n+2}{2n-2}}\right]^{\frac{(2n-2)n}{n^2-n+2}} \longrightarrow e^2$$
avendo usato il limite notevole $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$, per ogni successione $\{a_n\}$ infinita ($\lim_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$).

9.
$$\frac{e^{n^2}+4^n}{n!+n^n+5^n} \sim \frac{e^{n^2}}{n^n} = \left(\frac{e^n}{n}\right)^n \longrightarrow +\infty$$

10.
$$\frac{2n+\sin n \log n}{n} \sim \frac{2n}{n} = 2 \longrightarrow 2$$

11.
$$\frac{n^{3n}+n!}{10^n-(3n)^n} \sim \frac{n^{3n}}{-(3n)^n} = -\frac{n^{2n}}{3^n} \longrightarrow -\infty.$$

12.
$$\frac{\sqrt{4^n+1}}{2^n+1} \sim \frac{2^n+1}{2^n} = 1 \longrightarrow 1$$

13.
$$\cos n[\log(\sqrt{n}-1)-\log\sqrt{n-1}] = \cos n\left(\log\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n-1}}\right) = \underbrace{\cos n}_{\text{limitata}} \cdot \underbrace{\log\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n-1}}}_{\text{infinitesima}} \longrightarrow 0$$

14.
$$\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n = \left[\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^2 \left(1+\frac{2}{n-1}\right) \longrightarrow e^2.$$

15.
$$\frac{1-(-1)^n}{\sqrt{n}} = \underbrace{1-(-1)^n}_{\text{limitata}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\text{infinitesima}} \longrightarrow 0$$

16.
$$\sqrt[n]{\frac{3^n}{n}} = \frac{3}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow 3$$

grazie al limite notevole $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

17.
$$n2^{-n} = \frac{n}{2^n} \longrightarrow 0,$$

essendo n un infinito di ordine inferiore a 2^n.

18.
$$n^2 2^{\frac{1}{n}} \longrightarrow +\infty$$

per l'algebra dei limiti.

19.
$$n^{\frac{2}{n}} = (\sqrt[n]{n})^2 \longrightarrow 1.$$

20.
$$\frac{\arctan n}{n+(-1)^n} \sim \frac{\arctan n}{n} = \underbrace{\arctan n}_{\text{limitata}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{infinitesima}} \longrightarrow 0.$$

21.
$$\frac{e^n}{n^n+2} \sim \frac{e^n}{n^n} \longrightarrow 0$$

essendo e^n un infinito di ordine inferiore a n^n.

22.
$$\frac{\log^3 n + \sqrt[3]{n}}{n-n^2} \sim \frac{\sqrt[3]{n}}{-n^2} \longrightarrow 0$$

Abbiamo usato che $\log^3 n$ è un infinito di ordine inferiore a $\sqrt[3]{n}$.

23.
$$\frac{\log(n+1)}{\log(n-1)} = \frac{\log\left(n(1+\frac{1}{n})\right)}{\log\left(n(1-\frac{1}{n})\right)} = \frac{\log n + \log(1+\frac{1}{n})}{\log n + \log(1-\frac{1}{n})} \longrightarrow 1$$

24.
$$\frac{\log(n^3-1)}{\log(3n^4-6)} = \frac{3\log n + \log(1-\frac{1}{n^3})}{\log 3 + 4\log n + \log(1-\frac{6}{3n^4})} \longrightarrow \frac{3}{4}$$

25.
$$\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

26. Applichiamo il criterio del rapporto
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}{2^{(n+1)^2-n^2}} = \frac{3^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}}{2^{2n+1}} \longrightarrow 0 < 1,$$

quindi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{\sqrt{n}}}{2^{n^2}} = 0$.

27.
$$2^{n^2} - 3^{\sqrt{n}} = 2^{n^2}\left(1 - \frac{3^{\sqrt{n}}}{2^{n^2}}\right) \longrightarrow +\infty$$

avendo usato l'esercizio precedente.