Esercizi per il 4/12/19

1. Per ciascuna delle seguenti funzioni scrivere il *polinomio di MacLaurin* fino all'ordine indicato, utilizzando quelli delle funzioni elementari.

   (a) $f(x) = 8x^4 \log(1 + x^2) + \cos(8x^4), \qquad n = 9$

   (b) $f(x) = \cos(x^2)\sin(x^2), \qquad n = 10$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^5}}, \qquad n = 11$

   (d) $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x}, \qquad n = 5$

   (e) $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x^3}}{x}, \qquad n = 8$

   (f) $f(x) = \log(\frac{1+x}{1+3x}), \qquad n = 4$

2. Scrivere la *formula di Taylor con resto di Peano* delle seguenti funzioni nel punto indicato e fino all'ordine n richiesto (usando la definizione o riconducendosi agli sviluppi notevoli):

   (a) $f(x) = e^x, \quad x_0 = -1, n = 3$

   (b) $f(x) = \log x, \quad x_0 = 2, n = 3$

   (c) $f(x) = 2 + x + 3x^2 - x^3, \quad x_0 = 1, n = 2$

   (d) $f(x) = x\log(e^4 x), \quad x_0 = 1, n = 2$

3. Se per $x \to 0$, si verifica che $f(x) \sim kx^\alpha$ con $k \neq 0$ e $\alpha > 0$, si dice che α è l'ordine di infinitesimo di f rispetto all'infinitesimo campione x.
   Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ delle seguenti funzioni, utilizzando opportunamente gli sviluppi di MacLaurin.

   (a) $x\cos x - \sin x$

   (b) $1 + x^2 - e^{x^2} + \sin^3 x$

   (c) $e^x + e^{-x} - 2$

   (d) $\sqrt[5]{1 - 5x^2} - 1 + x^2$

   (e) $\sin x - xe^x + x^2\cos x$

4. Utilizzando l'esercizio precedente, calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{1 + x^2 - e^{x^2} + \sin^3 x}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - xe^x + x^2\cos x}{(\sinh x)^3}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1 - 5x^2} - 1 + x^2}{x^4}$