Analisi Matematica I - 23/01/2020 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1. * Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale risulta convergente: $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^{2+\alpha}}{\mathrm{e}^{2\,\alpha x} + \arctan(7x)}\,\mathrm{d}x$

A2. * Determinare l'integrale generale dell'equazione lineare completa $y'' - 7y' + 12y = 2e^x$.

A3. * Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{|(x+3)(x-4)|}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Determinare gli eventuali estremi di f nel suo insieme di definizione, specificando in quali punti vengono assunti e se si tratta di estremi locali o globali.

A4. Calcolare il valore del limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - \frac{2}{n} - \cos\left(\frac{2}{n}\right) + 1}{\sin\left(\frac{5}{n^3}\right)}$.

A5. * Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}\sin(x^2) - 2xe^{9x}}{e^{\alpha x}}$.

A6. Scrivere lo sviluppo di Taylor/Mac Laurin centrato in 0 per la funzione $f(x) = (e^x - 1)\sin(-2x)$ di ordine 4.

. Calcolare $f^{(4)}(0)$.

A7. Data $f(x) = 4x + \arctan(2x)$ e denotata con f^{-1} la sua inversa, calcolare $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{f^{-1}(y)}{y}$.

A8. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{\pi/14} \frac{\cos(7x)}{1+\sin^2(7x)}\,\mathrm{d}x$

A9. Calcolare $\left(\dfrac{z}{|z|} - i\dfrac{|z|}{z}\right)\left(\dfrac{z}{|z|} + i\dfrac{|z|}{z}\right)$ per $z = 1 + 2\,i$.

A10. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}\sin\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)}{n^\alpha + n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \cos\left(\frac{1}{n^3}\right)}$.

B1. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$, tale $f(a) = f(b)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ se f ha massimo in $[a, b]$, allora non ha minimo. $\boxed{\text{B}}$ se f ha minimo in $[a, b]$, allora non ha massimo. $\boxed{\text{C}}$ f ammette massimo e minimo in $[a, b]$. $\boxed{\text{D}}$ esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

B2. Sia $z = a - ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\text{Im}(z^2) = -2ab\, i$. $\boxed{\text{B}}$ $|z|^2 = a^2 - b^2$. $\boxed{\text{C}}$ $\text{Re}(z^2) = a^2 - b^2$. $\boxed{\text{D}}$ $z^2 = a^2 - b^2$.

B3. * Sia $f(x) \sim x \ln x$ per $x \to 0^+$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile. $\boxed{\text{A}}$ Se $g(0) = 0$ allora $f(x) \cdot g(x) = o(x^{3/2})$ per $x \to 0^+$. $\boxed{\text{B}}$ Se $g'(0) = 1$ allora $f(x) \cdot g(x) \sim x^2 \ln x$ per $x \to 0^+$. $\boxed{\text{C}}$ Se $g(0) \neq 0$ allora $f(x) \cdot g(x) \sim x \ln x$ per $x \to 0^+$. $\boxed{\text{D}}$ Se $g(0) = 0$ allora $f(x) \cdot g(x) \sim g'(0)x^2$ per $x \to 0^+$.

B4.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e sia $g(x) := \big(f(x)\big)^2$. Supponiamo che g sia derivabile in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{A}}$ Se $\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$ allora f è derivabile in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{B}}$ Se f è derivabile in $\mathbb{R}$ allora $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{C}}$ Se $\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$ allora f è derivabile in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{D}}$ Anche f è derivabile in $\mathbb{R}$.

B5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è limitata e continua. $\boxed{\text{B}}$ f è monotona e continua. $\boxed{\text{C}}$ f è dispari e limitata. $\boxed{\text{D}}$ f è pari e limitata.

B6. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tale che esistano finiti i limiti $L_0 := \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ e $L_1 := \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$. $\boxed{\text{A}}$ $L_0 = f(0)$ e $L_1 = f(1)$. $\boxed{\text{B}}$ Se $L_0 \cdot L_1 < 0$ allora esistono due punti $x_0, x_1 \in [0, 1]$ tali che $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$. $\boxed{\text{C}}$ Se $L_0 \cdot L_1 < 0$ allora f si annulla in almeno un punto di $[0, 1]$. $\boxed{\text{D}}$ Se $f(0) = L_0$ e $f(1) = L_1$ allora f è limitata in $[0, 1]$

B7.* Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergente. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\forall\, n \geq 0$ risulta $a_{n+1} \leq a_n$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. $\boxed{\text{C}}$ converge anche la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$. $\boxed{\text{D}}$ $\forall n \geq 1$ risulta $a_n \leq \dfrac{1}{n^2}$.

B8. * Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona e (x_n) una successione strettamente positiva tale che $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = +\infty$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \ell$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = \ell$, per ogni successione (a_n) convergente a 0. $\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ell$.

B9. Sia $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L > 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n > L - \epsilon$. $\boxed{\text{B}}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n > 0$. $\boxed{\text{C}}$ $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall\, n > \bar{n}$ $a_n > 0$. $\boxed{\text{D}}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n < L + \epsilon$.

B10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua con $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $|f|$ ammette minimo assoluto. $\boxed{\text{B}}$ f è strettamente crescente. $\boxed{\text{C}}$ $|f|$ ammette massimo assoluto. $\boxed{\text{D}}$ f ammette massimo e minimo assoluti.