A1 Sia

$$f(x) = \arctan\left(2\sin^2(x)\right).$$

Posto $m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, determinare

$$8 \cdot m.$$

Risposta:

Dal teorema di derivazione della funzione composta si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1 + [2\sin^2(x)]^2} \cdot 4\sin x \cos x$$

Pertanto $m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{1+1} \cdot 2 = 1$

La risposta corretta è 8.

A2 Sia

$$A := \int_0^2 \frac{5^x}{5^x + 10}\, dx$$

Calcolare il valore

$11 \cdot 5^A$.

Risposta:

Posto $t = 5^x$ risulta $dt = 5^x \ln 5\, dx$ e

si ha

$$A = \int_0^2 \frac{5^x}{5^x+10}\, dx = \int_1^{25} \frac{dt}{\ln 5\,(t+10)} = \frac{1}{\ln 5} \ln(t+10)\Big|_1^{25}$$

$$= \frac{\ln 35 - \ln 11}{\ln 5} = \frac{\ln(35/11)}{\ln 5}$$

Con la formula del cambiamento di base:

$$\ln_5 x = \frac{\ln x}{\ln 5}$$

Pertanto $\qquad A = \ln_5 \frac{35}{11}$

La risposta corretta è 35.

A3 Sia Z l'insieme delle radici in campo complesso dell'equazione

$$(z-10-2i)^4+4=0$$

Determinare il valore massimo assunto dalla funzione $\mathrm{Re}(z)$ sull'insieme Z.

Risposta:

Posto $\quad w = z-10-2i$, l'equazione diventa

$$w^4 = -4$$

Dato che $-4 = 4e^{i\pi}$, le radici quarte di -4 sono

$$w_k = \sqrt[4]{4}\, e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}} \qquad k=0,1,2,3$$

ossia

$$w_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad w_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5}{4}\pi}$$

$$w_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{4}\pi} \qquad w_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7}{4}\pi}$$

Ne segue che $\quad Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ dove $\quad z_k = w_k + 10 + 2i$.

Risulta $\quad \mathrm{Re}\, z_k = \mathrm{Re}\, w_k + 10$. Le radici con parte reale massima tra w_0, w_1, w_2, w_3 sono w_0 e w_3. Pertanto

$$\max \operatorname{Re} z_k = \operatorname{Re} w_0 + 10 = 11.$$

A4 Si consideri l'integrale improprio dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_{11}^{+\infty} \frac{e^{\arctan x} + \sqrt[4]{x+10}}{(x-10)^{\alpha/4} + \ln^2(x+5)}\, dx$$

Determinare l'estremo inferiore dei valori di α per cui l'integrale converge.

Risposta:

La funzione integranda è continua e positiva nell'intervallo di integrazione. Inoltre se $\alpha > 0$ risulta

$$f(x) = \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + \sqrt[4]{x+10}}{(x-10)^{\alpha/4} + \ln^2(x+5)} \sim \frac{x^{1/4}}{x^{\alpha/4}} = \frac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{4}}} \quad \text{per } x \to +\infty$$

$\frac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{4}}}$ è integrabile a $+\infty$ se $\frac{\alpha-1}{4} > 1$, ossia $\alpha > 5$.

Per il criterio di confronto asintotico, anche l'integrale dato converge per $\alpha > 5$.

Se invece $\alpha \leq 0$ allora $f(x) \sim \frac{x^{1/4}}{\ln^2 x}$ per $x \to +\infty$

e quindi $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e f non è integrabile all'∞.

Pertanto, la risposta corretta è 5.

A5 Calcolare

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{12\left[\sinh(3x) - \sin(3x)\right]}{x\left[x + \ln(1+x)\right]^2}.$$

Risposta:

$\sinh(3x) = 3x + \frac{1}{6}(3x)^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$

$\sin(3x) = 3x - \frac{1}{6}(3x)^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$

$\Rightarrow \sinh(3x) - \sin(3x) = \frac{1}{3} \cdot 27x^3 + o(x^3) = 9x^3 + o(x^3)$

$x + \ln(1+x) = 2x + o(x)$

$\Rightarrow x\left[x + \ln(1+x)\right]^2 = 4x^3 + o(x^3)$

Pertanto $L = 12 \cdot \frac{9}{4} = 27$

A6 Si consideri la funzione $f : (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sqrt{x+2}\left(\ln(x+2)\right)^2, \qquad x > -2.$$

Indicati con x_m e x_M gli unici punti di minimo e massimo locale per f, rispettivamente, calcolare

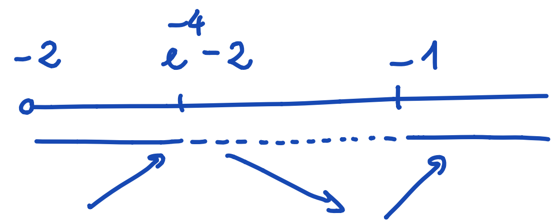
$$s = x_M + x_m - e^{-4}.$$

Risposta:

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \ln^2(x+2) + \sqrt{x+2} \cdot 2\,\frac{\ln(x+2)}{x+2} =$

$$= \frac{\ln(x+2)\left[\ln(x+2)+4\right]}{2\sqrt{x+2}} \qquad \text{se } x>-2$$

$$f'(x)>0 \iff x<e^{-4}-2 \quad \vee \quad x>-1$$



$$x_m=-1, \qquad x_M=e^{-4}-2$$

$$S=-3$$

B1 Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua e positiva e si consideri la funzione

$$F(x):=\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{per } x\in\mathbb{R}$$

Scegli un'alternativa:

- a. $F(0)=0$
- b. $\int_1^2 F(t)\,\mathrm{d}t = f(2)-f(1)$
- c. $F(x)\geq 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$
- X d. $F(0)\leq F(2)$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale $F'(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Essendo f positiva, F è crescente e quindi vale d).

B2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

Allora

Scegli un'alternativa:

- a. esiste $x_o \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_o) = 0$
- b. esiste $x_o \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_o) = \ell$
- c. esiste $x_o \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_o) = \ell$
- X d. esiste $x_o \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_o) = 0$

La funzione f ammette almeno un punto di min o di massimo. Per il teorema di Fermat, in tale punto la derivata prima si annulla.

B3 Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e tale che $f(a) = f(b) = 0$.

Scegli un'alternativa:

- a. $\exists x_1, x_2 \in (a, b)$, con $x_1 \neq x_2$, tale che $f(x_1)f(x_2) < 0$.
- X b. f assume massimo e minimo in $[a, b]$.
- c. $\exists c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.
- d. $\exists c \in (a, b)$ tale che $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$.

Per il teorema di Weierstrass.

B4

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 in $\mathbb{R}$. Sia $P(x)$ il suo polinomio di Taylor/MacLaurin centrato in 0 di ordine 2. Allora

Scegli un'alternativa:

- a. esiste $\delta \in (0,1)$ tale che $f(x) = P(x)$ per ogni $x \in (-\delta, \delta)$.
- b. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^2} = 1$
- X c. $f(x) - P(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$
- d. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{P(x)} = 0$

Per le proprietà del polinomio di Taylor / MacLaurin

B5

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

Scegli un'alternativa:

- a. $\forall\, n \geq 1$ abbiamo $a_{n+1} > a_n$.
- X b. $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n > \bar{n}$ abbiamo $a_n > 0$.
- c. $\forall\, n \geq 1$ abbiamo $a_{n+1} > 10a_n$.
- d. $\forall\, n \geq 1$ abbiamo $a_n > 0$.

Per la definizione di limite.

B6

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile la cui derivata non si annulla in alcun punto di $[a,b]$.

Scegli un'alternativa:

- X a. f è iniettiva
- b. f è suriettiva
- c. f è crescente in $[a,b]$
- d. f non assume massimo e minimo in $[a,b]$

Se esistessero $x_1, x_2 \in [a, b]$ t.c. $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$, per il T. di Lagrange esisterebbe c compreso tra x_1 e x_2 t.c. $f'(c) = 0$. Ma questo contraddice l'ipotesi.