Analisi Matematica 1 - 12/02/2020 - Tempo a disposizione: 3h

Matricola **Cognome e Nome**

A1. Determinare per quali $\alpha > 0$ converge la serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{n^\alpha}\right)}{\sin\left(\frac{2}{n^{1/2}}\right)}$.

A2. Calcolare il valore del limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cos\left(\frac{2}{n^2}\right)}{e^{6/n^4} - 1}$.

A3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left[x^3 \ln\left(\frac{x^4+1}{x^4}\right) + x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + 3\cos\left(\frac{x+1}{x^2}\right)\right]$

A4.⋆ Data $f(x) = \log_2(1+2x) + x$ con $x \in [0, +\infty)$ e denotata con g la sua inversa, calcolare la derivata di g nel punto $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

A5. Determinare la soluzione del problema di Cauchy per $x > 0$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2}{x^2} y + \dfrac{5}{x^2} \\ y(1) = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

A6.⋆ Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = x^3 \cos(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

A7.⋆ Scrivere il polinomio di Taylor/Mac Laurin di ordine 2 centrato in 1 della funzione $f(x) = \ln(4+x)$.

A8.⋆ Calcolare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^6 + i\,4\,z^4 = 0$.

A9. Calcolare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $\displaystyle\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{x+1}{x}\right) + 7 = \lambda$.

A10.⋆ Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale risulta convergente $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{e}^{-2x}\sin^2 x}{(\mathrm{e}^{7x}-1)^\alpha}\,\mathrm{d}x$

B1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $f(-1) = -1$ e $f(-2) = -2$. $\boxed{\text{A}}$ Esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) = n$. $\boxed{\text{B}}$ Esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x) = 1$. $\boxed{\text{C}}$ Per ogni $x \in [-2, -1]$ $f(x) < 0$. $\boxed{\text{D}}$ f ha un massimo locale in $x = -1$.

B2.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{-x^2}$. Sia $M_n = \max\limits_{x\in[0,n]} f(x)$. Allora (M_n) è una successione $\boxed{\text{A}}$ infinitesima $\boxed{\text{B}}$ costante $\boxed{\text{C}}$ indeterminata $\boxed{\text{D}}$ infinita

B3. * Sia $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = L \neq 0$, finito. Allora $\boxed{\text{A}}$ anche $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ esiste finito. $\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. $\boxed{\text{C}}$ $\forall \epsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > \bar{n}$ risulta $||a_n| - L| < \epsilon$. $\boxed{\text{D}}$ $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > \bar{n}$ risulta $a_n > L$.

B4.* Sia $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergente. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$. $\boxed{\text{C}}$ $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > \bar{n}$ risulta $a_n > 0$. $\boxed{\text{D}}$ converge anche la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

B5. Sia $f(x) \sim x$ per $x \to +\infty$. $\boxed{\text{A}}$ $f(x)(1 + \sin x) \sim f(x)$ per $x \to +\infty$. $\boxed{\text{B}}$ $f(x) = o(x\mathrm{e}^{1/x})$ per $x \to +\infty$. $\boxed{\text{C}}$ $\mathrm{e}^{f(x)} \sim \mathrm{e}^x$ per $x \to +\infty$. $\boxed{\text{D}}$ $f^2(x) \sim x^2$ per $x \to +\infty$.

B6.* Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, continua in (a, b), tale che $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\forall x \in (a, b)$ risulta $f(x) > 0$. $\boxed{\text{B}}$ $\exists c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$. $\boxed{\text{C}}$ $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$. $\boxed{\text{D}}$ la funzione f assume minimo in (a, b).

B7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata tale che $f(0) = 0$. $\boxed{\text{A}}$ $(\sup\limits_{\mathbb{R}} f) \cdot (\inf\limits_{\mathbb{R}} f) \leq 0$. $\boxed{\text{B}}$ f assume sia valori strettamente positivi sia valori strettamente negativi. $\boxed{\text{C}}$ f assume massimo e minimo in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{D}}$ Se f non assume massimo allora $\sup\limits_{\mathbb{R}} f = +\infty$.

B8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\int_{-\infty}^{0} |f(x)|\, dx$ converge. $\boxed{\text{B}}$ $\int_{0}^{+\infty} x f(x)\, dx$ converge. $\boxed{\text{C}}$ $\int_{0}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge. $\boxed{\text{D}}$ $\int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$ converge.

B9. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni convesse e derivabili due volte. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f \circ g$ è convessa, se g è crescente. $\boxed{\text{B}}$ $f \circ g$ è convessa. $\boxed{\text{C}}$ $f \circ g$ è crescente. $\boxed{\text{D}}$ $f \circ g$ è convessa, se f è crescente.

B10.* Sia $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}$. Allora un argomento di z^{10} è $\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{\pi}{3}$ $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{4}{3}\pi$ $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{2}{3}\pi$ $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{5}{3}\pi$