5 Serie di Fourier

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π, cioè $f(x+2\pi) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Vogliamo rappresentare la funzione f tramite funzioni trigonometriche elementari aventi la stessa proprietà di periodicità. Quindi scriviamo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \tag{35}$$

Per la determinazione dei coefficienti, procediamo supponendo che la serie converga uniformemente. Integriamo scambiando integrale e serie; otteniamo

$$\int_0^{2\pi} f(x)\ dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_0^{2\pi} \cos(nx)\ dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin(nx)\ dx \right];$$

quindi

$$\int_0^{2\pi} f(x)\ dx = a_0 \pi$$

Se invece si moltiplicano entrambi i membri della (35) per $\cos(kx)$ e si integra si ottiene

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\ dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(kx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(kx)\ dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(kx)\ dx \right]\end{aligned}$$

Con semplici calcoli, si ottiene che tutti gli addendi nel membro di destra dell'ultima uguaglianza sono nulli tranne uno; così

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\ dx = a_k \pi$$

Analogamente si procede moltiplicando entrambi i membri della (35) per $\sin(kx)$ e integrando.
In conclusione, l'espressione dei coefficienti è

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\, dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Osserviamo che $a_0/2$ è il valor medio della funzione f sull'intervallo $[0, 2\pi]$.
$a_1 \cos x + b_1 \sin x$ è detta armonica fondamentale, mentre $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ è l'armonica n-esima.
Affinché tali coefficienti esistano, si richiede che la funzione f sia *assolutamente integrabile*, cioè che

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx < \infty \tag{36}$$

Infatti, per il calcolo di a_n si ha che l'integrale esiste, dato che

$$|\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\, dx| \le \int_0^{2\pi} |f(x)\cos(nx)|\, dx \le \int_0^{2\pi} |f(x)| < \infty$$

poiché la funzione *cos* è limitata. Lo stesso vale per l'integrale che definisce i coefficienti b_n. Quindi alle funzioni periodiche di periodo 2π e assolutamente integrabili nell'intervallo $[0, 2\pi]$ si può associare una doppia successione di coefficienti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, con cui definire la serie di Fourier associata alla funzione f. Interessa analizzare due problemi: dapprima la convergenza della serie e poi il valore della sua somma. Infatti, vedremo in seguito, che non sempre vale il segno di "=" nella (35).

Definiamo lo spazio $\mathcal{P}_{2\pi}$. Si dice che la funzione f appartiene allo spazio $\mathcal{P}_{2\pi}$ se
i) f è periodica di periodo 2π
ii) f è continua a tratti (o generalmente continua), cioè si può suddividere l'intervallo $[0, 2\pi]$ in un numero finito di sottointervalli in modo tale che la funzione f sia continua in ciascuno di tali sottointervalli
iii) $\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx < \infty$.

Queste proprietà sono requisiti necessari perché si possa scrivere la serie di Fourier in (35), ma non sono sufficienti affinché valga il segno di = in (35). Serviranno ulteriori condizioni (che vedremo in seguito) per garantire che valga il segno di uguaglianza, cioè che la serie converga e che la sua somma valga $f(x)$. Pertanto se non si hanno informazioni sulla convergenza della serie, data $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, in (35) useremo il simbolo $\sim$ (associata a ...)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Qualora si sapesse che la serie associata a f converge, scriveremmo

$$S^f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

e poi ci porremmo la domanda circa l'uguaglianza

$$f(x) = S^f(x).$$

`Osservazioni`
• Se la funzione è periodica di periodo 2π, è sufficiente studiarla su un *qualsiasi* intervallo di ampiezza 2π. Quindi tutte le proprietà enunciate e gli integrali scritti restano invariati se considerati su un intervallo $[\sigma, \sigma + 2\pi]$.
• Se la funzione f è pari (cioè $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$), allora la serie di Fourier associata ad f consta solo di funzioni pari (la costante e i coseni); quindi $b_n = 0$ per ogni $n \geq 1$ (se si calcolano i coefficienti b_n con la formula si ottiene 0 perchè si integra su un intervallo simmetrico rispetto all'origine la funzione $f(x)\sin(nx)$ che è dispari, essendo il prodotto della funzione pari f per la funzione dispari *sin*). Inoltre

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx$$

• Se la funzione f è dispari (cioè $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$), allora la serie di Fourier associata ad f consta solo di funzioni dispari (i seni); quindi $a_n = 0$ per ogni $n \geq 0$ (se si calcolano i coefficienti a_n con la formula si ottiene 0 perchè si integra su un intervallo simmetrico rispetto all'origine la funzione $f(x)\cos(nx)$ che è dispari). Inoltre

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\, dx$$

• Se la funzione f è periodica di periodo T, allora la serie di Fourier associata è la serie di funzioni trigonometriche elementari di comune periodo T:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(\frac{2\pi n}{T} x) + b_n \sin(\frac{2\pi n}{T} x) \right]$$

con i coefficienti così definiti

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\sigma}^{\sigma+T} f(x) \cos(\frac{2\pi n}{T} x)\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\sigma}^{\sigma+T} f(x) \sin(\frac{2\pi n}{T} x)\, dx$$

• La serie di Fourier con gli esponenziali complessi (scriviamo la formula per il caso di periodicità 2π):

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

con i coefficienti complessi definiti da

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma}^{\sigma+2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Ricordando la definizione dei coefficienti reali a_n, b_n si ha che $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$, $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$. Così c_{-n} è il complesso coniugato di c_n: $c_{-n} = \overline{c_n}$.

Studiamo la **convergenza della serie di Fourier**. A tal scopo definiamo tre tipi di convergenza: convergenza puntuale, convergenza uniforme, convergenza in media quadratica. Enunciamo i teoremi nel caso di periodicità 2π, senza ledere la generalità.

Convergenza puntuale

Sia data una serie di Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \tag{37}$$

e per ogni $N = 1, 2, \ldots$ definiamo il polinomio di Fourier di ordine N

$$P_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]\,;$$

P_N è la somma parziale N-esima per la serie data.
Osserviamo che non sappiamo se la serie (37) converge, ma sicuramente hanno senso tutti i polinomi di Fourier corrispondenti a questa serie.

`Definizione`
Si dice che la serie di Fourier (37) *converge puntualmente e la sua somma vale S, se per ogni x fissato si ha*

$$\lim_{N\to\infty} P_N(x) = S(x)$$

cioè se $\quad \forall x \in [0, 2\pi], \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} : |S(x) - P_N(x)| < \varepsilon \quad \forall N \geq M.$

Quindi, se sappiamo che la serie converge, scriviamo

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Enunciamo il principale teorema che fornisce condizioni sufficienti per la convergenza puntuale di una serie di Fourier associata a una funzione $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Si considerano 3 casi, enunciando ipotesi sempre più generali sulla funzione f.

TEOREMA fondamentale di convergenza (puntuale)
Siano $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
1) Se nel punto x_0 la funzione f è continua e derivabile, allora la serie di Fourier converge nel punto x_0 e la sua somma $S^f(x_0)$ vale $f(x_0)$.
2) Se nel punto x_0 la funzione f è continua ed esistono finite le derivate destra e sinistra, allora la serie di Fourier converge nel punto x_0 e la sua somma $S^f(x_0)$ vale $f(x_0)$.
3) Se nel punto x_0 la funzione f ha una discontinuità con salto finito ed esistono finite le pseudo-derivate[2] destra e sinistra, allora la serie di Fourier converge nel punto x_0 e la sua somma $S^f(x_0)$ vale $\frac{l_+ + l_-}{2}$, dove $l_+ = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ e $l_- = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

Nella seguente figura 1 mostriamo un esempio per ciascuno dei tre casi contemplati dal teorema, considerando una funzione $f \in \mathcal{P}_T$ e tre diversi punti x_0, che nel grafico sono indicati con x_1, x_2, x_3 e corrispondono proprio ai tre casi elencati nel teorema:

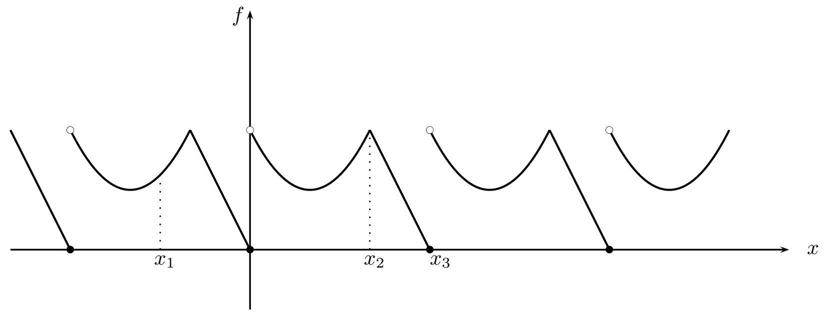


Figura 1: convergenza puntuale della serie di Fourier

Questo teorema è utile in molti casi, ma per esempio le sue ipotesi non sono soddisfatte per la funzione periodica di periodo 2π definita da $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x < 2\pi$. Ecco un altra condizione sufficiente per la convergenza puntuale, che permette di studiare l'esempio appena presentato.

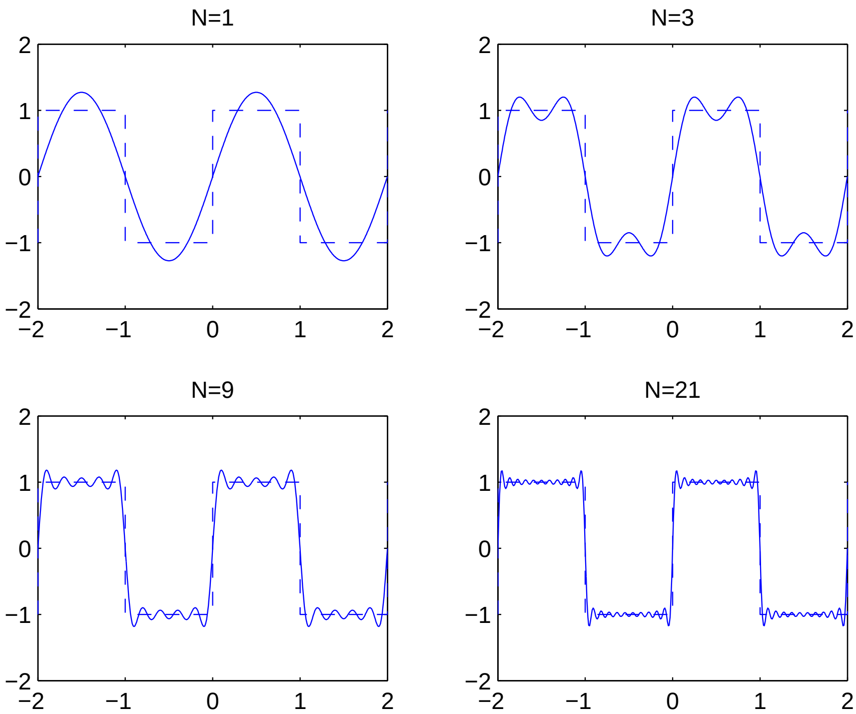
TEOREMA di monotonia (di Dirichlet)
Sia $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ e limitata.
Se è possibile suddividere l'intervallo $[0, 2\pi]$ *in un numero finito di sottointervalli in modo*

[2] La pseudo-derivata destra in x_0 è definita da $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - l_+}{x - x_0}$. Analogamente la pseudo-derivata sinistra.

che f sia monotona in ciascuno di tali sottointervalli, allora la serie di Fourier associata a f converge in ogni punto e si ha $S^f(x_0) = \dfrac{l_+ + l_-}{2}$, dove $l_+ = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $l_- = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

Rimane da sottolineare che la sola continuità della funzione f non è sufficiente per la convergenza della serie di Fourier associata. I controesempi sono però piuttosto complicati e dunque non li presentiamo in queste note.

Infine, vicino ai punti di discontinuità di f, per ogni intero $N \geq 1$ la somma parziale $P_N(x)$ presenta delle oscillazioni. Si tratta del *fenomeno di Gibbs*; per $N \to \infty$ queste oscillazioni non si smorzano, ma pur conservando la loro ampiezza esse agiscono in un insieme sempre più piccolo. Questo consente la convergenza puntuale nei punti di continuità di f, ma non la convergenza uniforme in un intervallo che contiene un punto di discontinuità di f. Tale fenomeno è messo in evidenza dai grafici seguenti. Essi mostrano alcuni polinomi di Fourier P_N (per $N = 1, 3, 9, 21$) associati all'onda quadra, che è la funzione $f \in \mathcal{P}_2$ costante a tratti e che assume due soli valori: 1 e -1.



Convergenza uniforme

Premettiamo la definizione di convergenza uniforme.

`Definizione`

Si dice che la serie di Fourier (37) *converge uniformemente e la sua somma vale S, se*

$$\lim_{N \to \infty} P_N(x) = S(x) \qquad \textit{uniformemente in } [0, 2\pi]$$

cioè se $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} : |S(x) - P_N(x)| < \varepsilon \quad \forall N \geq M, \forall x \in [0, 2\pi].$

Confrontare tale defnzione con quella di convergenza puntuale data a pagina 51.

TEOREMA

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione periodica di periodo 2π.
Allora la serie di Fourier associata a f converge uniformemente alla funzione f in ogni punto x_0, cioè

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0)\right], \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Significa che $S^f(x_0) = f(x_0)$ per ogni x_0.

Osserviamo che se $f \in C^1(\mathbb{R})$, si può scrivere la serie di Fourier associata ad f poiché si ha pure che f soddisfa *ii*) e *iii*) della definizione di spazio $\mathcal{P}_{2\pi}$.

Per quanto riguarda la convergenza di una serie di Fourier (senza nulla sapere della sua funzione generatrice), osserviamo che se i coefficienti della serie definiscono due successioni assolutamente integrabili:

$$\sum_n |a_n| < \infty, \qquad \sum_n |b_n| < \infty,$$

allora per il teorema di Weierstrass[3] sulla convergenza uniforme delle serie di funzioni, si ha che la serie (35) converge uniformemente in $[0, 2\pi]$ e la sua somma è funzione continua.

Convergenza in media quadratica

Sia $G_{2\pi}$ lo spazio vettoriale delle funzioni generalmente continue in $\mathbb{R}$, periodiche di periodo 2π e di quadrato integrabile in $[0, 2\pi]$ ($\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$). Esso è detto spazio di Gauss. Osserviamo che $G_{2\pi}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{P}_{2\pi}$, poiché $L^2(0, 2\pi) \subsetneq L^1(0, 2\pi)$. Quindi, se $f \in G_{2\pi}$, ha senso considerare la serie di Fourier associata ad f.

`Definizione`

Si dice che la serie di Fourier (35) *converge in media quadratica a f se*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - P_N(x)|^2 \, dx = 0$$

Definito l'errore quadratico medio $\mathcal{E}(P_N)$, per $N = 1, 2, \ldots$ (cioè $\mathcal{E}(P_N)$ è una successione di numeri) come

$$\mathcal{E}(P_N) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - P_N(x)|^2 dx,$$

la convergenza in media quadratica della serie di Fourier a f equivale alla convergenza

$$\lim_{N\to\infty} \mathcal{E}(P_N) = 0.$$

Nello spazio $G_{2\pi}$ è naturale considerare funzioni a valori complessi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Quindi in seguito tratteremo il caso generale di f a valori complessi (e quindi scriveremo $\overline{f}$ per

---

[3]**Teorema di Weierstrass sulla convergenza uniforme delle serie di funzioni**
Sia $g_n(x), n = 1, 2, \ldots$ una successione di funzioni definite in un intervallo I.
Se esiste una successione numerica $M_n, n = 1, 2, \ldots$, tale che
$M_n \geq 0 \qquad \forall n$
$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$
$|g_n(x)| \leq M_n \qquad \forall x \in I, \ \forall n$
allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ converge uniformemente in I.
Inoltre, se tutte le funzioni g_n sono continue in I, anche la somma della serie è una funzione continua in I.

indicare il complesso coniugato e $|v|^2 = v\overline{v}$). Allora scriviamo la serie di Fourier nella forma complessa $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ invece che nella forma reale fin qui utilizzata (vd. pagina 50). Per i polinomi si ha $P_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$.
Per una funzione $f \in G_{2\pi}$ valgono le seguenti proprietà:

1) tra tutte le serie trigonometriche, quella di Fourier è quella che meglio approssima la funzione f nel senso dei minimi quadrati;

2) vale la disuguaglianza di Bessel $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$;

3) vale l'uguaglianza di Parseval $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$.

Vediamole in dettaglio.

1) Minimizziamo l'errore quadratico medio che si commette approssimando f con un generico polinomio trigonometrico $Q_N = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} q_k e^{ikx}$ di ordine N:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(Q_N) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x) - Q_N(x)|^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big[\, |f(x)|^2 - f(x)\sum_{k=-N}^{N} \overline{q_k} e^{-ikx} - \overline{f(x)}\sum_{k=-N}^{N} q_k e^{ikx} + |Q_N(x)|^2 \,\Big]\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{k=-N}^{N} \overline{q_k} c_k - \sum_{k=-N}^{N} q_k \overline{c_k} + \sum_{k=-N}^{N} |q_k|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx + \sum_{k=-N}^{N} [|q_k - c_k|^2 - |c_k|^2]
\end{aligned}$$

Nell'ultima espressione si ha il valore minimo per $|q_k - c_k| = 0$, cioè se $\mathcal{E}(Q_N) \neq \mathcal{E}(P_N)$ allora $\mathcal{E}(Q_N) > \mathcal{E}(P_N)$ per ogni N. Allora l'errore quadratico medio è minimo se si scelgono i coefficienti $q_k = c_k$. Ecco dimostrato che tra tutti i polinomi trigonometrici Q_N di ordine N generico, quello di Fourier P_N meglio approssima la funzione f nel senso dei minimi quadrati. Inoltre, l'errore quadratico medio vale

$$\mathcal{E}(P_N) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2$$

2) Poiché, per costruzione, $\mathcal{E}(P_N) \geq 0$, dall'ultima relazione scritta sopra si ha

$$\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \qquad \forall N = 1, 2, \ldots$$

Passando al limite per $N \to \infty$ si ottiene la disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

3) Quando passiamo al limite $N \to \infty$, ci interessa se vale il segno di uguale e non la disuguaglianza. Infatti il segno di uguale corrisponde al fatto che $\lim\limits_{N\to\infty} \mathcal{E}_N = 0$ e questa è la

convergenza in media quadratica. In effetti basta che $f \in G_{2\pi}$ per avere la convergenza in media quadratica; dunque la *convergenza in media quadratica è la convergenza "naturale" per le funzioni* $f \in G_{2\pi}$, mentre la convergenza puntuale e quella uniforme richiedono ipotesi più forti.
Verifichiamo che vale l'uguaglianza di Parseval. Facciamo i seguenti calcoli formali (sono rigorosi se, per esempio, la serie converge uniformemente; in realtà, si giustificano questi passaggi con nozioni che esulano da quanto insegnato in questo corso)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{f(x)}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{c_k e^{ikx}} dx \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{c_k} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{c_k} c_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2
\end{aligned}$$

Derivabilità

Data una serie di Fourier associata ad un funzione f, una volta verificata la convergenza della serie alla funzione f stessa, ci si chiede se nell'uguaglianza

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

si possono derivare entrambi i membri ottenendo ancora una uguaglianza.

Formalmente, se si deriva termine a termine si ha

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [b_n n \cos(nx) - a_n n \sin(nx)]$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-n^2 a_n \cos(nx) - n^2 b_n \sin(nx)\right]$$

e così via. Quindi se alla funzione f si associano i coefficienti di Fourier a_n, b_n, allora alla sua derivata k-esima $f^{(k)}$ si associano i coefficienti di Fourier $(-1)^{\frac{k}{2}} n^k a_n, (-1)^{\frac{k}{2}} n^k b_n$ (per k pari) o $(-1)^{\frac{k-1}{2}} n^k b_n, (-1)^{\frac{k+1}{2}} n^k a_n$ (per k dispari).

La convergenza e la uguaglianza nelle relazioni scritte sopra sono da verificare come sempre. Vale il seguente risultato.

Sia $f \in C^p(\mathbb{R})$, con $p \geq 2$, una funzione periodica di periodo 2π e

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Allora la serie di Fourier si può derivare termine a termine e la serie derivata è convergente alla derivata $f'(x)$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [b_n n \cos(nx) - a_n n \sin(nx)]$$

e così via derivando successivamente fino a $p-1$ volte.
Per esempio, se $f \in C^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{P}_{2\pi}$ si ha

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx)]$$

(con il segno di uguale perché $f' \in C^1(\mathbb{R})$ e quindi la serie qui sopra converge unifomemente) e

$$f''(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left[-n^2 a_n \cos(nx) - n^2 b_n \sin(nx)\right]$$

(solo con il simbolo di associato, perché $f'' \in C^0(\mathbb{R})$; per la convergenza si ricorre al teorema fondamentale di convergenza puntuale, vd. pag. 51).

Viceversa, sia data una serie di Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Sapendo che converge, che cosa si può dire sulla convergenza della serie ottenuta derivando termine a termine? Osserviamo che non sempre la serie delle derivate converge. Per esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \sin(nx)$$

è un serie convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$, perché ogni addendo è maggiorato in modulo da $n^{-3/2}$ e la serie ottenuta sommando questi addendi è convergente[4]. Ma la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} \cos(nx)$$

non converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti per $x = 2\pi$ (e tutti i multipli) si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$.
Vale il seguente risultato.

Se per un qualche numero $p = 0, 1, 2, \ldots$ si ha

$$\sum_n n^p |a_n| < \infty \qquad e \qquad \sum_n n^p |b_n| < \infty,$$

allora la serie di Fourier converge unifomemente in $\mathbb{R}$ e la sua somma $S(x)$ è una funzione di regolarità $C^p(\mathbb{R})$

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

e si può derivare termine a termine

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [-na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx)]$$

[4]Ripasso: la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$.

... *fino alla derivata di ordine p (cioè vale il segno di $' ='$ per ogni derivata).*
Si deduce che quanto più alto è l'ordine di infinitesimo dei coefficienti di Fourier tanto più regolare è la funzione somma e viceversa.
Vedremo che una simile proprietà vale tra una funzione e la sua trasformata di Fourier.

Integrabilità

Sia $f \in G_{2\pi}$ e

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \tag{38}$$

Allora la serie di Fourier si può integrare termine a termine e la serie integrale è uniformemente convergente alla funzione F che è una primitiva di f

$$F(x) = C + \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n} \sin(nx) - \frac{b_n}{n} \cos(nx)\right] \tag{39}$$

Qui la costante C è tale che valga il segno di uguale ($F(0) = C - \sum \frac{b_n}{n}$). In particolare mettiamo in evidenza il fatto che anche se la serie associata ad f *non* è convergente (non c'è il segno $=$ in (38)), si ha che la serie integrale (39) è convergente (c'è il segno $=$ in (39)).
Non presentiamo la dimostrazione; osserviamo solo che il criterio di convergenza uniforme di Weierstrass si applica in questo caso. Infatti, dalla uguaglianza di Parseval si ha che la serie $\sum_{n=1}^{\infty}[|a_n|^2 + |b_n|^2]$ converge. Per l'addendo n-esimo della serie integrale (39) si ha

$$\left|\frac{a_n}{n}\right| \leq \frac{1}{2}|a_n|^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\,, \qquad \left|-\frac{b_n}{n}\right| \leq \frac{1}{2}|b_n|^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$$

Sommando tutti gli addendi, si ottiene la maggiorazione per la serie dei moduli dei coefficienti di (39)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left|\frac{a_n}{n}\right| + \left|-\frac{b_n}{n}\right|\right] \leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left[|a_n|^2 + |b_n|^2\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Tutte queste serie convergono e quindi la serie (39) converge uniformemente e la sua somma è una funzione continua.

6 Complementi

La trasformata di Fourier

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione assolutamente integrabile (cioè $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$) e generalmente continua. Allora si definisce

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\omega}dx$$

La nuova funzione $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è detta la *trasformata di Fourier* di f. Si denota anche con $\mathcal{F}(f(x); \omega)$.

Proprietà:

- $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R})$ e $\lim_{\omega\to\pm\infty} |\hat{f}(\omega)| = 0$; non si ha che $\hat{f}$ è assolutamente integrabile.
- se f e f' sono trasformabili, allora $\widehat{f'} = i\omega\hat{f}$
- se $f(x)$ e $xf(x)$ sono trasformabili, allora $\widehat{xf(x)} = i\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega)$
- definita $\tau_a(x) = f(x-a)$ si ha $\widehat{\tau} = e^{-ia\omega}\hat{f}$
- $\widehat{e^{iax}f(x)} = \hat{f}(\omega - a)$
- definita $\sigma(x) = f(ax)$ (per $a > 0$) si ha $\widehat{\sigma}(\omega) = \dfrac{1}{a}\hat{f}(\dfrac{\omega}{a})$
- se f, g[5] sono trasformabili, allora $\widehat{f * g} = 2\pi\hat{f}\hat{g}$
- se f, g, fg sono trasformabili, allora $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$

Esempi

$$f(x) = e^{-b|x|} \text{ (con } b > 0) \qquad \hat{f}(\omega) = \frac{b}{\pi(b^2+\omega^2)}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -a \le x \le a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \hat{f}(\omega) = \frac{\sin(a\omega)}{\pi\omega}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x \le a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \hat{f}(\omega) = \frac{1-e^{-ia\omega}}{2\pi i\omega}$$

$$f(x) = e^{-\alpha x^2} \text{ (con } \alpha > 0) \qquad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}}\, e^{-\omega^2/4\alpha}$$

Osserviamo che nota $\hat{f}$, non sempre si può ottenere un'espressione per f. Ma nel caso in cui f è di quadrato integrabile, cioè $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2dx < \infty$, si ha che anche $\hat{f}$ lo è e inoltre

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2d\omega$$

In tale caso vale la formula di inversione

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{ix\omega}d\omega$$

[5] Il prodotto di convoluzione $h = f * g$ è $h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy$.
Se f, g sono assolutamente integrabili, anche il loro prodotto di convoluzione lo è.
Es.: per $f(x) = e^{-\alpha x^2}, g(x) = e^{-\beta x^2}$ si ha $(f * g)(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha+\beta}}e^{-x^2/(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})}$.

Equazione del calore in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \beta^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Definiamo $\hat{u}(\omega, t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x} dx$ e trasformiamo secondo Fourier l'equazione differenziale; otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) + \beta^2 \omega^2 \hat{u}(\omega, t) = 0 \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}, \forall t > 0$$

che ha soluzione

$$\hat{u}(\omega, t) = C(\omega) e^{-\beta^2 \omega^2 t}$$

Ricordando la condizione iniziale, si ha $C = \hat{\phi}$ (supponiamo che ϕ sia trasformabile). Definiamo $\hat{g}_t(\omega) = e^{-\beta^2 \omega^2 t}$. Così, $\hat{u}(\omega, t) = \hat{\phi}(\omega) \hat{g}_t(\omega)$. Quindi antitrasformando si ha

$$u(x,t) = (\phi * g_t)(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi\beta^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\beta^2 t}} dy$$

Osserviamo che anche se la temperatura iniziale ϕ non è derivabile (per es., ϕ è costante a tratti e nulla all'infinito), per ogni istante $t > 0$ la temperatura $u(\cdot, t)$ è infinitamente derivabile (e le sue derivate coinvolgono solo le derivate di g_t).

Equazione della corda vibrante in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \\ u(x,0) = p_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Definiamo $\hat{u}(\omega, t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x} dx$ e trasformiamo secondo Fourier l'equazione differenziale; otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(\omega, t) + c^2 \omega^2 \hat{u}(\omega, t) = 0 \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}, \forall t > 0$$

che ha soluzione

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{A}(\omega)\cos(c\omega t) + \hat{B}(\omega)\sin(c\omega t) = \frac{1}{2}\left[\hat{A}(\omega) + \tfrac{1}{i}\hat{B}(\omega)\right] e^{ic\omega t} + \frac{1}{2}\left[\hat{A}(\omega) - \tfrac{1}{i}\hat{B}(\omega)\right] e^{-ic\omega t}$$

Antitrasformando troviamo

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{1}{2}\left[A(x+ct) + \tfrac{1}{i}B(x+ct)\right] + \tfrac{1}{2}\left[A(x-ct) - \tfrac{1}{i}B(x-ct)\right] \\ &\equiv \frac{A(x+ct) + A(x-ct)}{2} + \frac{B(x+ct) - B(x-ct)}{2i} \end{aligned}$$

Le condizioni iniziali danno

$$p_0(x) = A(x), \qquad v_0(x) = \frac{c}{i} B'(x)$$

Quindi si ottiene che la soluzione è

$$u(x,t) = \frac{p_0(x+ct) + p_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds$$

nota come *formula di D'Alembert.*