

Compattificazioni di spazi di moduli di radici di fibrati in rette

Maurizio Cornalba

Dipartimento di Matematica
Università di Pavia
via Ferrata 1, 27100 Pavia

Abstract: *This note describes the results of [7] on degenerations of roots of line bundles on algebraic curves. A compactification of the space of all pairs consisting of a smooth curve and an r -th root of the canonical bundle (r -spin curves) has been constructed by Jarvis [12], Abramovich-Jarvis [1] and Chiodo [8]. As shown in [7], it is possible to give a version of this compactification which generalizes the one given by Cornalba [9][10] for $r = 2$, and whose points are pairs consisting of a quasistable curve and a suitable line bundle on it. It is natural to try and compare this compactification with the closure of the variety of smooth r -spin curves in the Caporaso compactification of the relative Picard variety [6]. It has been proved by Fontanari [11] that for $r = 2$ the two compactifications coincide. On the contrary, it can be shown [7] that this is false as soon as $r > 2$, and more precisely that there is no morphism from either compactification to the other which reduces to the natural one on the locus parametrizing smooth curves.*

Lo studio dello spazio delle radici dei fasci dualizzanti di curve lisce e delle loro degenerazioni ha ricevuto di recente considerevole attenzione, soprattutto in vista di una possibile applicazione alla risoluzione della congettura di Witten generalizzata [13]. In questa nota vengono illustrati i risultati di [7], che fornisce due diversi approcci al problema di descrivere le degenerazioni di radici di fibrati in rette su curve e confronta le varietà così ottenute.

Radici limite.

Sia $\pi : \mathcal{C} \rightarrow B$ una famiglia di curve algebriche stabili, e sia $\mathcal{C}^* \rightarrow B^*$ la restrizione di questa famiglia all'aperto B^* di B che parametrizza curve lisce. Supponiamo dato un fibrato in rette \mathcal{N} su B , di grado relativo $d > 0$. Se b è un punto di B , indichiamo con C_b la fibra $\pi^{-1}(b)$, e poniamo $N_b = \mathcal{N}|_{C_b}$. Sia r un intero positivo che divide d .

Indichiamo con $S_\pi^r(\mathcal{N})$ l'insieme costituito da tutte le coppie (b, L) , dove $b \in B^*$ e L è un fibrato in rette (o più esattamente una classe di isomorfismo di fibrati in rette) su C_b tale che L^r sia isomorfo a N_b . Questo insieme ha una struttura naturale di varietà algebrica, ed è altresì naturale porsi il seguente

PROBLEMA 1. *Costruire una compactificazione relativa di $S_\pi^r(\mathcal{N})$,*

cioè, in termini meno precisi ma forse più intuitivi,

PROBLEMA 1'. *Dare senso alle parole "radice r -esima di N_b " anche quando C_b è singolare.*

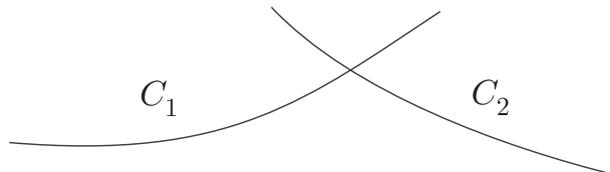
Le situazioni nelle quali "classicamente" era nota una risposta al problema appena enunciato sono le seguenti:

- a) $r = 2$, $\mathcal{N} = \omega_\pi$. In questo caso lo spazio $S_\pi^r(\mathcal{N})$ parametrizza le theta-caratteristiche su fibre di π , e una sua compactificazione è stata costruita ad esempio da Deligne

(non pubblicato) e da Cornalba [9][10]. Nella versione di Deligne i punti del bordo sono fasci senza torsione su curve stabili, mentre nella versione di Cornalba sono fibrati in rette su curve quasistabili (definizione più sotto).

- b) $r = 2$, $\mathcal{N} = \mathcal{O}$. In questo caso lo spazio $S_\pi^r(\mathcal{N})$ parametrizza i punti di 2-torsione nelle Jacobiane delle fibre di π . Una sua compattificazione è stata costruita da Beauville [5] tramite la teoria dei rivestimenti ammissibili.

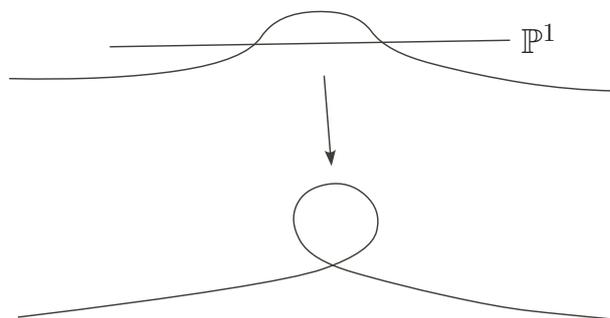
Vale forse la pena di ricordare che la nozione ingenua di radice r -esima non è adeguata a risolvere il problema. Ad esempio, se C è la curva ottenuta da due curve lisce C_1 e C_2 di generi g_1 e g_2 identificando un punto di una a un punto dell'altra,



la restrizione di ω_C a C_i ha grado $2g_i - 1$, e dunque dispari. Ne segue che ω_C non possiede radici quadrate, almeno nel senso elementare del termine.

Soluzioni generali del problema 1 sono state ottenute da Jarvis [12], Abramovich-Jarvis [1] e Chiodo [8]. I punti del bordo sono descritti, nella soluzione di Jarvis, per mezzo di fasci senza torsione su curve stabili. Le soluzioni di Abramovich-Jarvis e Chiodo utilizzano invece, in due modi diversi, la nozione di “twisted curve” [3][2]. Pur usando metodi diversi, tutti questi autori ottengono compattificazioni tra loro isomorfe.

Seguendo [7], è possibile dare una soluzione del problema 1 anche con i metodi usati in [9] e [10] per $r = 2$; la compattificazione ottenuta è anch'essa isomorfa a quelle di Jarvis, Abramovich-Jarvis e Chiodo. Ci limiteremo al caso, più semplice, in cui r sia primo. I punti geometrici della compattificazione corrispondono in questo caso a fibrati in rette su curve quasistabili. Per definire la nozione di quasistabilità, chiameremo *eccezionale* una componente razionale liscia di una curva nodata che incontri il resto della curva in al più due punti. Una curva nodata connessa si dice *quasistabile* se è semistabile e, in più, tutte le catene di curve razionali lisce eccezionali che essa contiene hanno lunghezza uno. La figura qui sotto illustra una modificazione quasistabile di una curva stabile.



Se E è una componente eccezionale di una curva semistabile C , e q_1, q_2 i punti dove essa incontra il resto di C , diremo a volte che q_1 e q_2 sono gli *estremi* di E .

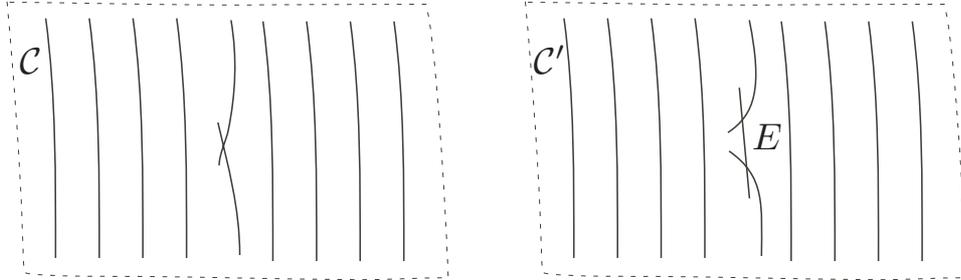
Sia ora C una curva stabile di genere g , e sia N un fibrato in rette su C . Indichiamo con d il grado di N , e con r un intero positivo che divide d . Una *radice r -esima limite* di N è il dato di:

- a) una modificazione quasistabile $\varphi : X \rightarrow C$,
- b) un fibrato in rette L su X di grado d/r ,
- c) un omomorfismo $\alpha : L^r \rightarrow \varphi^*(N)$,

tali che:

- i) se E è una componente eccezionale di X , la restrizione di L a E ha grado 1 (ne segue in particolare che α si annulla identicamente su E),
- ii) α è un isomorfismo sul complementare delle componenti eccezionali,
- iii) se q_1 e q_2 sono gli estremi di una componente eccezionale E , e s_1 e s_2 gli ordini di annullamento in q_1 e q_2 della restrizione di α a $X - (E - \{q_1, q_2\})$, allora $s_1 + s_2 = r$.

Per dare un'idea di come le radici limite rappresentino degenerazioni di ordinarie radici r -esime di fibrati in rette su curve lisce, esaminiamo quello che è forse l'esempio più semplice di radice limite non banale. Consideriamo una famiglia $\eta : \mathcal{C} \rightarrow D$, dove D è un disco $\{|\tau| < \varepsilon\}$, la fibra centrale è unione di due componenti lisce unite in un solo punto, e le rimanenti fibre sono lisce. Supporremo anche che la superficie \mathcal{C} sia liscia; dunque su un piccolo intorno del nodo della fibra centrale vi sono coordinate locali x e y tali che la mappa η sia data da $\tau = xy$. Indichiamo con $\mathcal{C}'' \rightarrow D'$ la famiglia ottenuta da $\mathcal{C} \rightarrow D$ tramite il cambiamento di base $\tau = t^2$; la superficie \mathcal{C}'' ha una singolarità di tipo A_1 , risolvendo la quale si ottiene una famiglia $\eta' : \mathcal{C}' \rightarrow D'$ di curve semistabili. La superficie \mathcal{C}' è liscia, e la fibra centrale \mathcal{C}'_0 è costituita dalle due componenti di \mathcal{C}_0 e da una componente eccezionale E che le unisce.



Poniamo $\mathcal{P} = \omega_{\eta'}(-E)$. La restrizione di questo fibrato in rette a \mathcal{C}'_0 possiede radici quadrate. Infatti la sua restrizione a ciascuna delle componenti di \mathcal{C}'_0 ha grado pari, e quindi ha una radice quadrata; basta poi “incollare” queste radici tramite radici quadrate dei dati di incollamento di $\omega_{\eta'}(-E)|_{\mathcal{C}'_0}$. Ogni radice quadrata L così ottenuta si estende a una radice quadrata \mathcal{L} di \mathcal{P} . Il risultato è un omomorfismo $\bar{\alpha} : \mathcal{L}^2 \rightarrow \omega_{\eta'}$, che è un isomorfismo ovunque, tranne che sulla fibra centrale, dove si riduce a un omomorfismo $\alpha : L^2 \rightarrow \omega_{\mathcal{C}'_0}$ che soddisfa le condizioni i), ii) e iii) della definizione di radice limite. In questo esempio, dunque, le radici quadrate L_t di $\omega_{\mathcal{C}'_t}$ degenerano alla radice limite $(\mathcal{C}'_0, L, \alpha)$ di $\omega_{\mathcal{C}'_0}$.

Torniamo al problema 1. L'insieme $\overline{S}_\pi^r(\mathcal{N})$ delle (classi di isomorfismo di) coppie
 (punto b di B , radice limite r -esima di N_b),

munito di una opportuna struttura analitica, è una compattificazione relativa di $S_\pi^r(\mathcal{N})$, e la proiezione $\overline{S}_\pi^r(\mathcal{N}) \rightarrow B$ è un morfismo finito.

Ad ogni radice limite si può associare un grafo. Sia dunque C una curva stabile, N un fibrato in rette su C , e (X, L, α) una radice limite r -esima di N . Il *grafo* di questa radice limite non è altro che il grafo di C , “arricchito” associando a ogni semispigolo un intero non negativo, e precisamente l'ordine di annullamento di α nel punto corrispondente della normalizzata di C . Per essere più precisi, ricordiamo che il grafo di C consiste di:

- un insieme V (i vertici del grafo) i cui elementi sono le componenti della normalizzazione \tilde{C} di C ;
- un insieme Λ (i semispigoli del grafo) i cui elementi sono i punti marcati di \tilde{C} , cioè quelli corrispondenti a nodi di C ;
- una partizione $\Lambda = \coprod_{v \in V} \Lambda_v$, dove Λ_v è l'insieme dei punti marcati giacenti sulla componente di \tilde{C} che corrisponde a v ;
- una involuzione senza punti fissi σ di Λ le cui orbite (gli spigoli del grafo) sono le coppie di punti marcati di \tilde{C} che vanno nello stesso nodo di C ;
- una funzione a valori interi non negativi $v \mapsto g_v$ che associa ad ogni vertice il genere della componente corrispondente di \tilde{C} .

Il grafo di (X, L, α) si ottiene aggiungendo a questi dati:

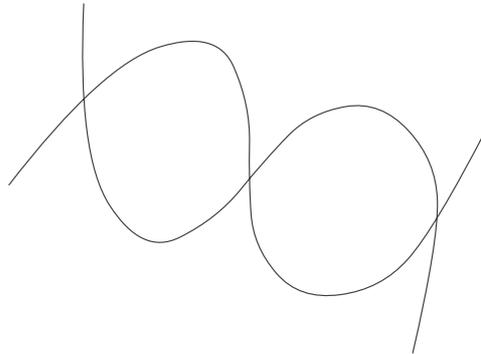
- una funzione $\ell \mapsto s_\ell$, dove s_ℓ è un intero tale che $0 \leq s_\ell < r$, che associa ad ogni semispigolo l'ordine di annullamento di α nel punto corrispondente di \tilde{C} ;
- una funzione a valori interi $v \mapsto d_v$ che associa ad ogni vertice il grado della restrizione di N alla componente corrispondente di C .

Tutti questi dati soddisfano le seguenti condizioni:

- $2g_v - 2 + |\Lambda_v| > 0$ per ogni $v \in V$ (stabilità di C);
- $s_\ell + s_{\sigma(\ell)} \equiv 0$ modulo r per ogni $\ell \in \Lambda$;
- $d_v - \sum_{\ell \in \Lambda_v} s_\ell$ è divisibile per r per ogni $v \in V$.

Viceversa, ogni “grafo arricchito” soddisfacente queste condizioni è il grafo di qualche radice limite.

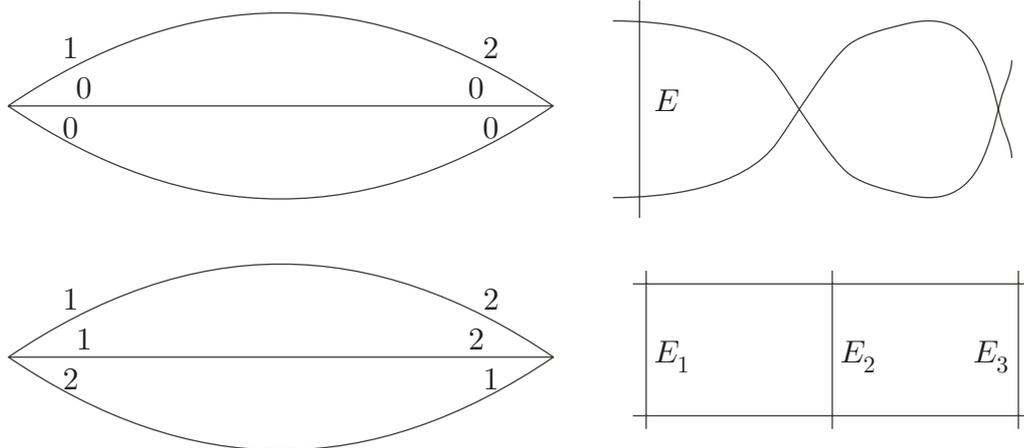
ESEMPIO 2. Sia $r = 3$, e sia C una curva della forma



Indichiamo con C_1 e C_2 le componenti di C e poniamo $d_i = \deg_{C_i} N$. Supponiamo che r divida $d_1 + d_2$. Cerchiamo tutti i grafi di radici terze limite di N compatibili con questi dati.

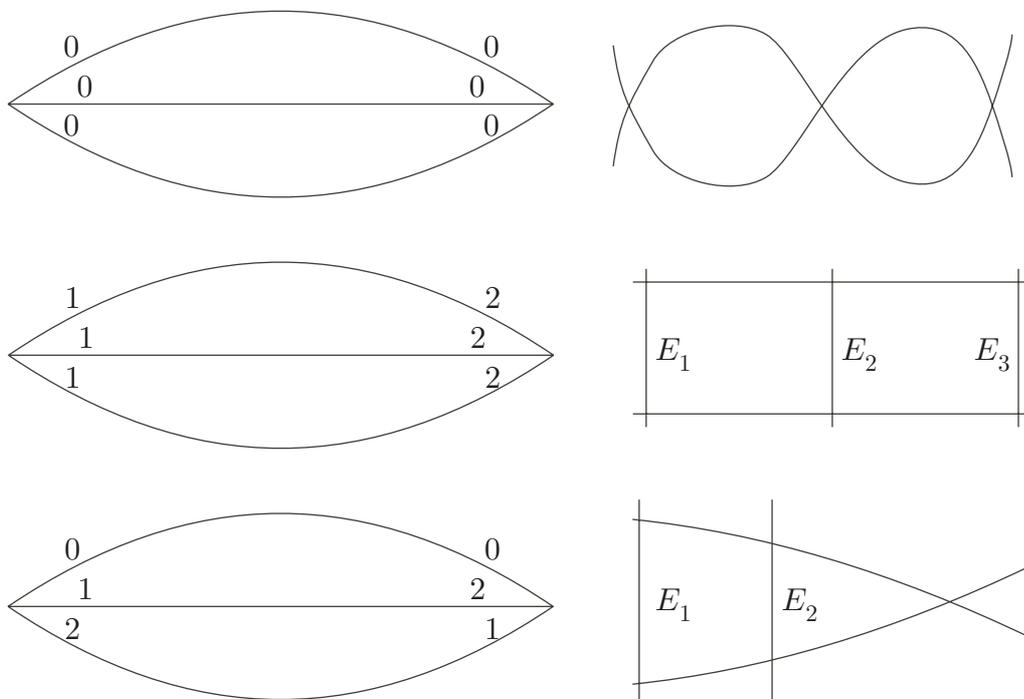
Caso a): $d_1 \equiv 1 \pmod{3}$ (e quindi $d_2 \equiv 2 \pmod{3}$)

I grafi possibili, a meno di permutazioni degli spigoli, sono illustrati qui sotto a sinistra. Il vertice di sinistra corrisponde a C_1 e quello di destra a C_2 . Accanto a ogni semispigolo sono indicati i corrispondenti valori della funzione s . A destra di ognuno dei grafi è illustrata la corrispondente curva quasistabile. La lettera E , seguita o no da un indice, indica una componente eccezionale.



Caso b): $r|d_1$ (e quindi $r|d_2$)

I grafi possibili e le corrispondenti curve quasistabili sono illustrati qui di seguito.



La nozione di radice limite permette di costruire una compattificazione della varietà S_g^r che parametrizza le classi di isomorfismo di coppie costituite da una curva liscia C di genere g e da un fibrato in rette L su C tale che $L^r \cong \omega_C$. Una compattificazione di S_g^r è la varietà \overline{S}_g^r i cui punti sono le classi di isomorfismo di radici r -esime limite del fascio dualizzante su curve stabili di genere g . Il morfismo naturale $\overline{S}_g^r \rightarrow \overline{M}_g$ è finito.

La compattificazione di Caporaso.

Sia $X \subset \mathbb{P}^m$ una curva nodata non degenera di genere g e grado $d \gg 0$, dove $m = d - g$, e poniamo $L = \mathcal{O}_X(1)$. Uno dei risultati fondamentali di [6] afferma che, rispetto a una opportuna linearizzazione dell'azione di $G = \mathrm{SL}(m + 1)$, il punto di Hilbert di X è semistabile nel senso della teoria geometrica degli invarianti se e solo se per ogni sottocurva completa Y di X vale la cosiddetta “Basic Inequality”

$$(3) \quad \left| d_Y - d \frac{w_Y}{2g - 2} \right| \leq \frac{k_Y}{2},$$

dove $d_Y = \deg_Y(L)$, $w_Y = \deg_Y(\omega_X)$, e k_Y è il numero di punti di intersezione tra Y e $\overline{X - Y}$. Osserviamo che, in questo caso, X è necessariamente quasistabile, e inoltre $d_E = 1$ per ogni componente eccezionale E .

Tutti i termini che compaiono nella Basic Inequality hanno senso anche quando L è un qualsiasi fibrato in rette su X . È importante notare che i due lati di (3) e il grado d_E , dove E è una componente eccezionale, non cambiano se si rimpiazza L con $L \otimes \omega_X^h$, per qualsiasi intero h .

Poniamo

$$P_{d,g} = \left\{ (X, L) : \begin{array}{l} X \text{ curva liscia di genere } g, L \\ \text{fibrato in rette di grado } d \text{ su } X \end{array} \right\} / \text{isomorfismo}.$$

Supponiamo che $d \gg 0$ e poniamo $m = d - g$. Indichiamo con H lo schema di Hilbert delle curve nodate connesse di genere g e grado d in \mathbb{P}^m , e con H_{ss} l'insieme dei suoi punti G -semistabili. Una compattificazione di $P_{d,g}$ è data da

$$\overline{P}_{d,g} = H_{ss}/G.$$

Gli isomorfismi

$$\begin{aligned} P_{d,g} &\rightarrow P_{d+h(2g-2),g} \\ (X, L) &\mapsto (X, L \otimes \omega_X^h) \end{aligned}$$

permettono di costruire una compattificazione $\overline{P}_{d,g}$ di $P_{d,g}$ per ogni d . In ogni caso i punti di $\overline{P}_{d,g}$ sono “descritti” dalla Basic Inequality (3) e dalla condizione di avere grado positivo su ogni componente eccezionale. Per costruzione, $\overline{P}_{d,g}$ e $\overline{P}_{d+h(2g-2),g}$ sono isomorfi.

Lo spazio S_g^r , che, come si è detto, parametrizza coppie formate da una curva liscia di genere g e da una radice r -esima del fascio dualizzante, si immerge in modo naturale in $P_{(2g-2)/r,g}$. Una compattificazione di S_g^r è dunque data dalla sua chiusura in $\overline{P}_{(2g-2)/r,g}$,

che indicheremo con \widehat{S}_g^r . È naturale chiedersi se \widehat{S}_g^r coincida con \overline{S}_g^r , anche perchè entrambe le compattificazioni sono descrivibili in termini di curve quasistabili. Fontanari [11] ha mostrato che ciò è vero per $r = 2$, cioè che

$$\overline{S}_g^2 \cong \widehat{S}_g^2.$$

Lo stesso problema si pone per radici del fascio strutturale. Anche in questo caso la risposta è affermativa per $r = 2$, come hanno mostrato Ballico, Casagrande e Fontanari [4].

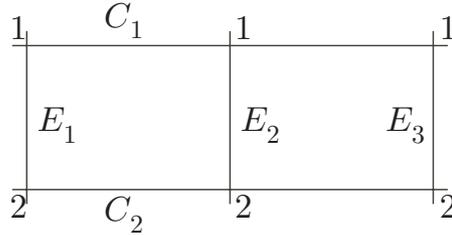
Appena $r \geq 3$, invece, l'equivalenza birazionale

$$\overline{S}_g^r \dashrightarrow \widehat{S}_g^r$$

non è un morfismo in nessuna delle due direzioni. Qui ci limiteremo a mostrare, riprendendo l'esempio 2, che $\overline{S}_g^3 \dashrightarrow \widehat{S}_g^3$ non è un morfismo. Lo faremo osservando che il morfismo naturale $\mu : \widehat{S}_g^3 \rightarrow \overline{M}_g$ non è finito. Siano dunque C , C_1 e C_2 come nell'esempio 2, e poniamo

$$\begin{aligned} g_i &= \text{genere di } C_i, \\ d &= 2g - 2, \\ d_i &= 2g_i + 1 = \deg_{C_i} \omega_C. \end{aligned}$$

Supponiamo che d_1 e d_2 siano divisibili per 3, e consideriamo una radice terza limite (X, L) di ω_C , con X della forma



Nella figura, il numero adiacente ad ogni nodo di X è l'intero s_ℓ che compete al corrispondente semispigolo del grafo della radice limite. Ciò significa che, se indichiamo con q_i il punto di intersezione di C_1 con E_i e con q'_i il punto di intersezione di C_2 con E_i , e poniamo $L_i = L|_{C_i}$, allora

$$\begin{aligned} L_1^3 &\cong \omega_{X|C_1}(-\sum q_i) \cong \omega_{C_1}, \\ L_2^3 &\cong \omega_{X|C_2}(-\sum 2q'_i) \cong \omega_{C_2}(-\sum q'_i). \end{aligned}$$

Consideriamo una famiglia

$$\tilde{\mathcal{X}} \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{D} \subset \mathbb{C}^3$$

di curve, con fibra centrale X e fibra generica liscia, che vicino a ogni componente eccezionale E_i sia della forma

$$\begin{aligned} x_i \xi_i &= t_i^2 && \text{presso } q_i, \\ y_i \eta_i &= t_i && \text{presso } q'_i, \\ \xi_i \eta_i &= 1, \end{aligned}$$

dove t_1, t_2, t_3 sono le coordinate in \mathbb{C}^3 , q_i è il punto dato da $x_i = \xi_i = 0$ e $t_j = 0$ per ogni j , q'_i è il punto dato da $y_i = \eta_i = 0$ e $t_j = 0$ per ogni j , ed equazioni locali per E_i sono $x_i = 0 = t_j$ per ogni $j \neq i$ vicino a q_i , e $y_i = 0 = t_j$ per ogni $j \neq i$ vicino a q'_i .

Indichiamo con \mathcal{E}_i il luogo in $\tilde{\mathcal{X}}$ dove $x_i = 0$ o $y_i = 0$. Il divisore \mathcal{E}_i non è di Cartier, ma lo è invece $2\mathcal{E}_i$. Il fibrato in rette L si estende a un fibrato in rette $\tilde{\mathcal{L}}$ su $\tilde{\mathcal{X}}$ tale che $\tilde{\mathcal{L}}^3 \cong \omega_{\tilde{f}}(-2 \sum \mathcal{E}_i)$. Siano ora $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ costanti non nulle, e consideriamo la famiglia

$$\mathcal{X} \xrightarrow{f} D, \quad D = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \varepsilon\}$$

e il fibrato in rette \mathcal{L} ottenuti da $\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \tilde{D}$ e da $\tilde{\mathcal{L}}$ tramite il cambiamento di base $t \mapsto (\alpha_1 t, \alpha_2 t, \alpha_3 t)$. La fibra centrale di questa famiglia è X , e inoltre

$$\mathcal{L}^3 \cong \omega_f(-2 \sum E_i).$$

Ora, le restrizioni di $\mathcal{L}(-C_2)$ alle varie componenti di X hanno le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(-C_2)|_{E_i} &\cong \mathcal{O}_{E_i}; \\ (\mathcal{L}(-C_2))|_{C_1}^3 &\cong \omega_{C_1}; \\ (\mathcal{L}(-C_2))|_{C_2}^3 &\cong \omega_{C_2}(2 \sum q'_i). \end{aligned}$$

Ne segue che, se indichiamo con $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow D$ la famiglia di curve stabili ottenuta da $\mathcal{X} \rightarrow D$ contraendo le curve E_i , il fibrato in rette $\mathcal{L}(-C_2)$ discende a un fibrato in rette \mathcal{L}' su \mathcal{C} con la proprietà che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'^3|_{C_1} &\cong \omega_{C_1}, \\ \mathcal{L}'^3|_{C_2} &\cong \omega_{C_2}(2 \sum q'_i). \end{aligned}$$

Dunque, se poniamo $L' = \mathcal{L}'|_{\mathcal{C}}$, si ha che

$$\begin{aligned} \deg_{C_1} L' &= \frac{d_1}{3} - 1, \\ \deg_{C_2} L' &= \frac{d_2}{3} + 1. \end{aligned}$$

In particolare, L' verifica le condizioni di semistabilità date dalla Basic Inequality (3), e perciò (C, L') rappresenta un punto di \widehat{S}_g^3 . D'altra parte si può verificare direttamente che L' dipende dalla scelta di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Più esattamente, mentre è chiaro che le restrizioni di L' a C_1 e C_2 non dipendono da questa scelta, ne dipendono i dati di incollamento tra $L'|_{C_1}$ e $L'|_{C_2}$ in q_1, q_2, q_3 . Se ne conclude che, se indichiamo con $[C]$ la classe di C in \overline{M}_g , la fibra di $\mu : \widehat{S}_g^3 \rightarrow \overline{M}_g$ su $[C]$ contiene una sottovarietà di dimensione positiva. Ciò mostra quanto annunciato, cioè che μ non è un morfismo finito. Una analisi più accurata mostrerebbe quanto segue. Siano $t_1, t_2, \dots, t_{3g-3}$ i parametri di una deformazione universale della radice limite (X, L) . Possiamo supporre che la restrizione di questa deformazione al luogo

$t_4 = \dots = t_{3g-3} = 0$ non sia altro che $(\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \tilde{D}, \tilde{\mathcal{L}})$. La radice limite (X, L) possiede automorfismi *inessenziali*, che inducono cioè l'automorfismo identico su C . L'azione di ognuno di questi automorfismi sulla deformazione universale di (X, L) corrisponde a

$$(4) \quad (t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{3g-3}) \mapsto (\zeta t_1, \zeta t_2, \zeta t_3, t_4, \dots, t_{3g-3}),$$

dove ζ è una radice terza dell'unità. Se supponiamo che C_1 e C_2 non abbiano automorfismi non banali, e che non siano isomorfe, (X, L) non ha altri automorfismi. In questo caso dunque lo spazio \overline{S}_g^3 può essere descritto localmente come il quoziente di \mathbb{C}^{3g-3} modulo l'azione (4) delle radici terze dell'unità. In altre parole, \overline{S}_g^3 è localmente il prodotto di uno spazio affine di dimensione $3g - 6$ per il cono sopra la superficie di Veronese in \mathbb{P}^9 . La compattificazione \widehat{S}_g^3 si ottiene invece localmente per scoppimento del luogo singolare di \overline{S}_g^3 . È dunque il prodotto di uno spazio affine di dimensione $3g - 6$ per la desingularizzazione standard del cono sopra la superficie di Veronese in \mathbb{P}^9 .

BIBLIOGRAFIA

1. D. Abramovich, T. Jarvis, *Moduli of twisted spin curves*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2002), 685–699.
2. D. Abramovich, A. Corti, A. Vistoli, *Twisted bundles and admissible covers*, Communications in Algebra **31** (2003), 3547–3618.
3. D. Abramovich, A. Vistoli, *Compactifying the space of stable maps*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 27–75.
4. E. Ballico, C. Casagrande, C. Fontanari, *Moduli of Prym curves*, math.AG/0304197.
5. A. Beauville, *Prym varieties and the Schottky problem*, Invent. Math. **41** (1977), 149–196.
6. L. Caporaso, *A compactification of the universal Picard variety over the moduli space of stable curves*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 589–660.
7. L. Caporaso, C. Casagrande, M. Cornalba, *Moduli of roots of line bundles on curves*, preprint 2003.
8. A. Chiodo, *Higher Spin curves and Witten's top Chern class*, Ph.D. thesis, University of Cambridge (2003).
9. M. Cornalba, *Moduli of curves and theta-characteristics*, in “Lectures on Riemann Surfaces” (M. Cornalba, X. Gomez-Mont, A. Verjovsky, eds.), World Scientific, Singapore, 1989, pp. 560–589.
10. M. Cornalba, *A remark on the Picard group of spin moduli space*, Rend. Mat. Acc. Lincei **(9) 2** (1991), 211–217.
11. C. Fontanari, *On the geometry of the compactification of the universal Picard variety*, math.AG/0202168.
12. T. Jarvis, *Torsion-free sheaves and moduli of generalized spin curves*, Compositio Math. **110** (1998), 291–333.
13. E. Witten, *Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space*, in “Surveys in differential geometry (Cambridge, MA, 1990)”, Lehigh University, Bethlehem, PA, 1991, pp. 243–310.