

Coomologia in grado basso degli spazi di moduli delle curve

Maurizio Cornalba

Dipartimento di Matematica
Università di Pavia
via Ferrata 1, 27100 Pavia

Abstract: *we illustrate the results of [1], where the first, second, and third rational cohomology groups of the moduli space of n -pointed algebraic curves of genus g are calculated, for all g and n , by algebro-geometric techniques. The result is that the first and third cohomology groups are always zero, while the second cohomology group is generated by tautological classes, modulo explicit relations.*

Il problema di calcolare gli anelli di coomologia degli spazi di moduli di curve algebriche è centrale in matematica e una sua risoluzione potrebbe anche avere importanti implicazioni fisiche. Non mi consta che Brioschi si sia mai occupato direttamente degli spazi di moduli di curve. Si occupò tuttavia diffusamente di teoria degli invarianti; a partire dal fondamentale trattato [11] questa, nella forma di teoria geometrica degli invarianti, è uno degli strumenti principali nella costruzione e nello studio della struttura degli spazi di moduli.

Considereremo innanzitutto superficie di Riemann compatte e connesse (che spesso chiameremo per brevità curve algebriche lisce, o più semplicemente curve lisce) n -puntate, dove n è un intero non negativo. Con ciò intendiamo il dato di una superficie di Riemann compatta e connessa C e di n punti distinti e numerati p_1, \dots, p_n di C .

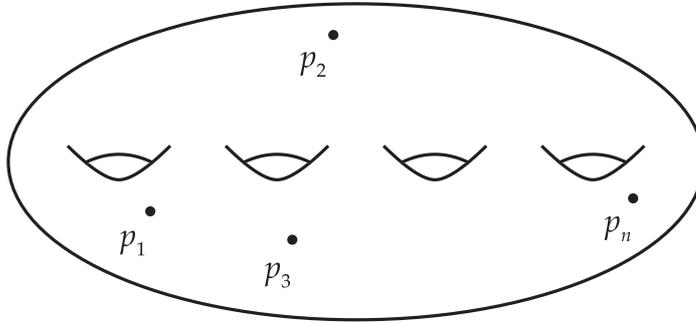


Figura 1.

Un isomorfismo tra curve lisce n -puntate $(C; p_1, \dots, p_n)$ e $(C'; p'_1, \dots, p'_n)$ è un isomorfismo $\varphi : C \rightarrow C'$ di superficie di Riemann tale che $\varphi(p_i) = p'_i$ per ogni i . Nel seguito, senza ulteriore avviso, ci limiteremo a considerare curve n -puntate il cui genere g soddisfi la disuguaglianza

$$2g - 2 + n > 0.$$

Non è difficile rendersi conto che le curve n -puntate per le quali vale questa limitazione sono esattamente quelle il cui gruppo di automorfismi è finito. Poniamo ora

$$\mathcal{M}_{g,n} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Superficie di Riemann compatte} \\ \text{e connesse } n\text{-puntate di genere } g \end{array} \right\} / \text{isomorfismo}$$

È ben noto (cf. [11] per $n = 0$ e [10] in generale) che $\mathcal{M}_{g,n}$ ha una struttura naturale di varietà algebrica di dimensione complessa $3g - 3 + n$. Non si tratta comunque di una varietà algebrica completa (a meno che $g = 0$ e $n = 3$, nel qual caso abbiamo a che fare con un solo punto). La figura 2 raffigura tre stadi di una degenerazione di curve di genere 2 verso un “limite” che non è più una superficie di Riemann, ma una curva algebrica singolare per una singolarità che analiticamente è della forma $xy = 0$, dove x e y sono coordinate nello spazio complesso bidimensionale.

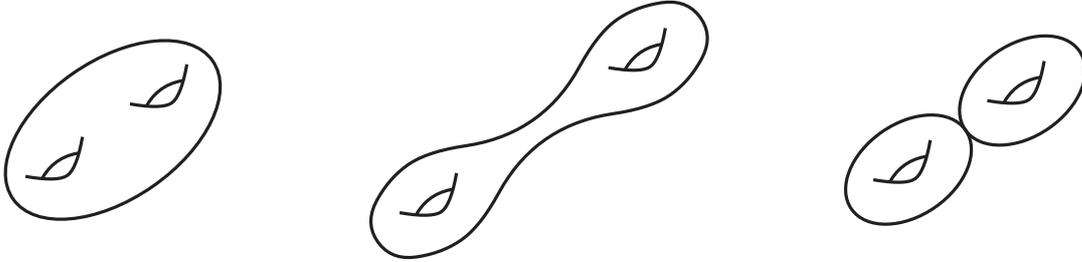


Figura 2.

Una compattificazione naturale di $\mathcal{M}_{g,n}$ è stata costruita da Deligne e Mumford [2]. I suoi punti, oltre a quelli di $\mathcal{M}_{g,n}$, sono le classi di isomorfismo di curve n -puntate *stabili* di genere g . Queste sono curve algebriche compatte e connesse di genere g le cui sole singolarità sono nodi (cioè della forma $xy = 0$), sulle quali siano marcati e numerati n punti lisci distinti; la condizione di stabilità significa che si richiede inoltre a queste curve di avere un gruppo di automorfismi finito. La nozione di genere di una tale curva si può definire ad esempio pensandola come limite di curve lisce nel senso prima indicato e definendo il genere stesso come uguale al genere delle approssimanti. Un esempio di genere 7 è illustrato nella figura 3.

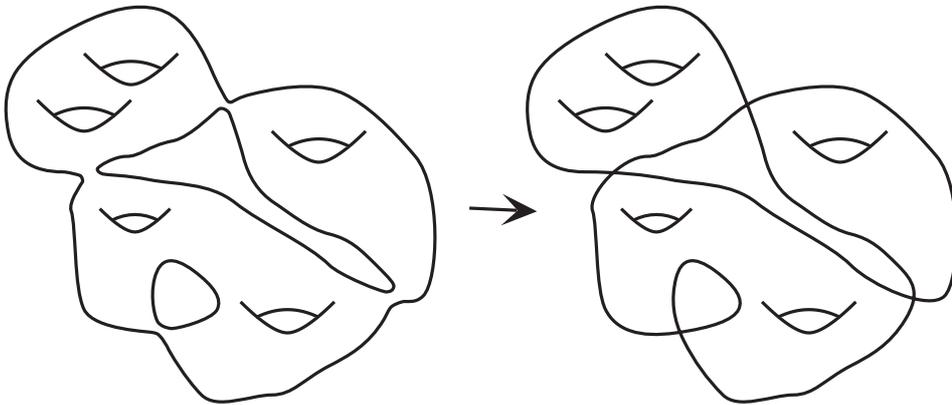


Figura 3.

La compattificazione di Deligne-Mumford si indica con $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Si tratta di una varietà algebrica proiettiva e irriducibile nella quale $\mathcal{M}_{g,n}$ è un aperto di Zariski. Il suo *bordo* $\partial\mathcal{M}_{g,n}$ è $\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \setminus \mathcal{M}_{g,n}$. Le singolarità di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ sono tutte singolarità quoziente; ognuna di esse si ottiene cioè dividendo un aperto in \mathbb{C}^{3g-3+n} per l'azione di un gruppo finito. Una conseguenza importante di ciò, che useremo costantemente in seguito, è che, in omologia e coomologia razionale, vale per gli spazi di moduli delle curve la dualità di Poincaré.

Se poniamo

$$V_m = \text{luogo delle curve in } \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \text{ con almeno } m \text{ punti singolari}$$

non è difficile mostrare che la codimensione complessa di V_m in $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ è esattamente m . In particolare $V_1 = \partial\mathcal{M}_{g,n}$ è un divisore in $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

Le componenti di $\partial\mathcal{M}_{g,n}$ sono di due tipi. Una componente, che indichiamo con Δ_{irr} , ha come elementi generali le curve irriducibili con un solo nodo, come in figura 4.

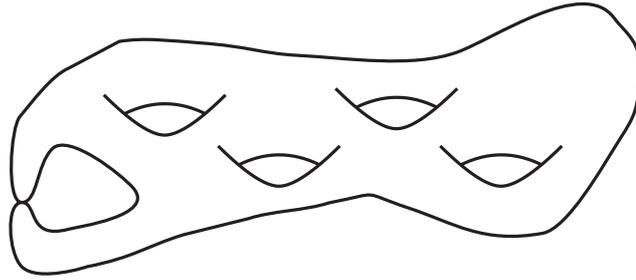


Figura 4.

Le altre componenti sono le $\Delta_{a,A}$, dove a è un intero compreso tra zero e g e $A \subset \{1, \dots, n\}$. Un elemento generale di $\Delta_{a,A}$ ha la forma illustrata dalla figura 5.

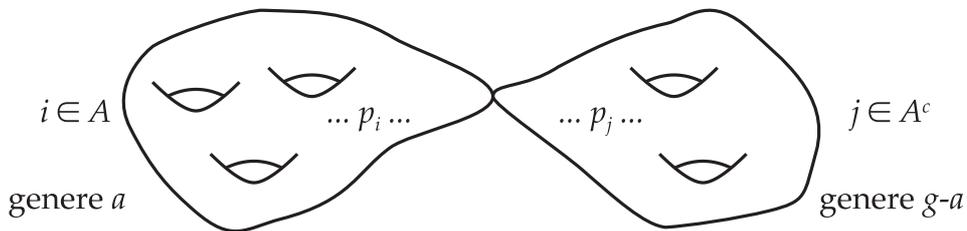


Figura 5.

dove A^c sta per il complementare di A in $\{1, \dots, n\}$. Va osservato che $\Delta_{a,A} = \Delta_{g-a,A^c}$. Inoltre la stabilità delle curve che costituiscono $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ implica che $\Delta_{0,A}$ è vuoto se $|A| < 2$. Il divisore Δ_{irr} è l'immagine della applicazione (genericamente 2-1) da $\overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2}$ a $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ ottenuta identificando i punti marcati da $n+1$ e $n+2$ (figura 6).

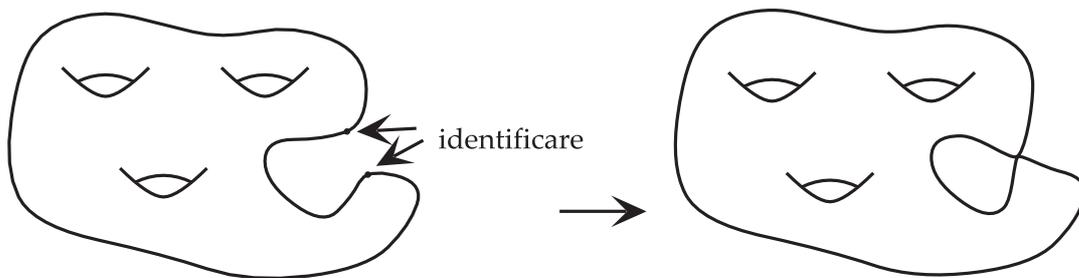


Figura 6.

A sua volta $\Delta_{a,A}$ è l'immagine di una applicazione

$$\overline{\mathcal{M}}_{a,|A|+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g-a,|A^c|+1} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

descritta graficamente dalla figura 7.

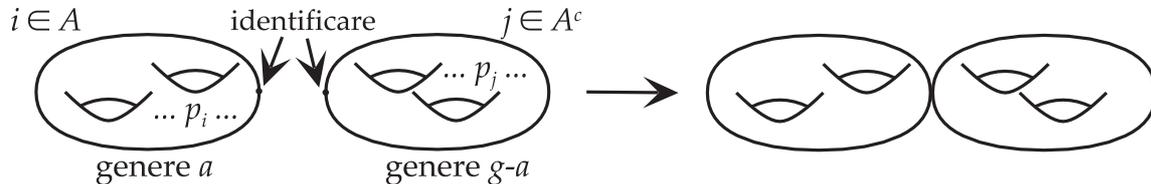


Figura 7.

È di fondamentale importanza sottolineare che, come si è già osservato, quando $a = g$ si deve necessariamente avere che $|A^c| > 1$, cioè che $|A| + 1 < n$. In definitiva, si può dire che i “mattoni” con cui è costruito $\partial\mathcal{M}_{g,n}$ sono gli spazi $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma,\nu}$ tali che $\gamma < g$ oppure $\gamma = g$ e $\nu < n$.

È naturale chiedersi come sia “fatto” $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ o, più in particolare, quale sia la sua topologia. Più modestamente, possiamo tentare di calcolare la coomologia razionale di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Riassumiamo i principali fatti noti a questo riguardo; nella notazione per i gruppi di coomologia ometteremo sempre di indicare il gruppo dei coefficienti, sottintendendo che si tratta di \mathbb{Q} .

- Si conosce l'anello di coomologia $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,n})$ [9].
- Getzler [3] ha annunciato il calcolo dell'anello di coomologia pari $H^{even}(\overline{\mathcal{M}}_{1,n})$.
- Si conoscono i gruppi $H^1(\mathcal{M}_{g,n})$ [12][13].
- Si conoscono i gruppi $H^2(\mathcal{M}_{g,n})$, $H^3(\mathcal{M}_{g,n})$, $H^4(\mathcal{M}_{g,0})$ (quest'ultimo almeno per g sufficientemente grande) [4][5][6].
- La dimensione di $H^k(\mathcal{M}_{g,n})$ non dipende da g , quando questo è sufficientemente grande relativamente a k (stabilità della coomologia) [7].

Tutti questi risultati, tranne quelli riguardanti i casi di genere 0 o 1, sono stati dimostrati usando essenzialmente tecniche di topologia geometrica. Va notato a questo proposito che $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ e $\overline{\mathcal{M}}_{1,n}$ sono “speciali” in quanto i loro gruppi di coomologia sono generati da classi fondamentali di sottovarietà del bordo. Questo è decisamente falso se $g > 1$.

È tuttavia possibile trattare anche il caso di genere maggiore di 1 usando solo un minimo di topologia geometrica e appoggiandosi invece in larga misura a tecniche algebro-geometriche [1]; il resto di questa conferenza è dedicato all'illustrazione di questo lavoro. L'idea, in forma ingenua, è quella di ridurre il calcolo di $H^k(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ a quello di $H^k(\partial\mathcal{M}_{g,n})$ usando risultati di tipo Lefschetz, e di lavorare poi per induzione su g e n . È ragionevole pensare che una induzione di questo tipo sia possibile dato che, come si è osservato, il bordo di $\mathcal{M}_{g,n}$ è essenzialmente costituito da spazi di moduli o prodotti di spazi di moduli $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma,\nu}$ con $\gamma < g$ oppure $\gamma = g$ e $\nu < n$.

Una prima difficoltà è che il teorema di Lefschetz sulle sezioni iperpiane non è applicabile in quanto $\partial\mathcal{M}_{g,n}$ non è in generale ampio. Un caso in cui questo accade

è quello di genere zero; se ne deduce che $H_k(\mathcal{M}_{0,n}) = 0$ se $k > \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_{0,n}) = n - 3$. Si sa tuttavia che, se $g > 0$ e $n > 0$, allora $\mathcal{M}_{g,n}$ ha una spina di dimensione reale $4g - 4 + n$ (cf. [8]). Ne segue che in questo caso l'omologia di $\mathcal{M}_{g,n}$ si annulla in dimensione maggiore di $4g - 4 + n$. Non è difficile mostrare, riducendosi al caso $n > 0$, l'annullarsi della omologia di $\mathcal{M}_{g,0}$ in dimensione maggiore di $4g - 5$. Usando la dualità di Poincaré e la successione esatta di coomologia a supporti compatti, tutto ciò dimostra il seguente risultato.

Lemma. *L'omomorfismo $H^k(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) \rightarrow H^k(\partial\mathcal{M}_{g,n})$ è un isomorfismo per $k < d(g,n)$ ed è iniettivo per $k = d(g,n)$, dove*

$$d(g,n) = \begin{cases} n - 4 & \text{se } g = 0, \\ 2g - 2 & \text{se } n = 0, \\ 2g - 3 + n & \text{se } g > 0, n > 0. \end{cases}$$

Scriviamo ora

$$\partial\mathcal{M}_{g,n} = \bigcup_i D_i,$$

dove i D_i sono le componenti irriducibili del bordo. Come si è osservato, vi sono applicazioni finite e suriettive

$$X_i \rightarrow D_i,$$

dove, secondo i casi, X_i è uguale a $\overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2}$ o a $\overline{\mathcal{M}}_{a,h+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{b,k+1}$, con $a + b = g$, $h + k = n$. Usando il lemma precedente e un po' di teoria di Hodge mista si giunge al seguente risultato.

Lemma Base. *Se $k \leq d(g,n)$ l'applicazione naturale*

$$H^k(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) \rightarrow \bigoplus_i H^k(D_i) \subset \bigoplus_i H^k(X_i)$$

è iniettiva.

Questo ci dice in un certo senso che la struttura combinatoria del bordo non contribuisce ad $H^k(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$. Questa struttura limita tuttavia le classi di $\bigoplus_i H^k(X_i)$ che possono provenire da $H^k(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$; possono essere di questo tipo solo quelle che soddisfano l'ovvia condizione di compatibilità sulle intersezioni a due a due di componenti del bordo.

Il Lemma Base è già sufficiente a determinare il primo e il terzo gruppo di coomologia di ogni spazio di moduli di curve.

Proposizione 1. *$H^1(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) = H^3(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) = 0$ per ogni g e ogni n .*

È chiaro che il Lemma Base consente di procedere per induzione doppia su g ed n purché si riesca a dimostrare la proposizione nei casi in cui $k > d(g,n)$, dove $k = 1$ o $k = 3$. Infatti, se $X_i = \overline{\mathcal{M}}_{a,h+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{b,k+1}$, la formula di Künneth dice che

$$\begin{aligned} H^1(X_i) &= H^1(\overline{\mathcal{M}}_{a,h+1}) \oplus H^1(\overline{\mathcal{M}}_{b,k+1}), \\ H^3(X_i) &= H^3(\overline{\mathcal{M}}_{a,h+1}) \oplus (H^2(\overline{\mathcal{M}}_{a,h+1}) \otimes H^1(\overline{\mathcal{M}}_{b,k+1})) \\ &\quad \oplus (H^1(\overline{\mathcal{M}}_{a,h+1}) \otimes H^2(\overline{\mathcal{M}}_{b,k+1})) \oplus H^3(\overline{\mathcal{M}}_{b,k+1}), \end{aligned}$$

e quindi per ipotesi induttiva (e, nel caso di H^3 , per l'annullarsi degli H^1 , che va supposto già dimostrato) si può concludere che $H^1(X_i)$ e $H^3(X_i)$ sono nulli. I casi iniziali dell'induzione, quelli cioè in cui $k > d(g, n)$, non sono molti. Per $k = 1$ essi sono solo tre, e cioè $g = 0, n = 3, 4$ e $g = 1, n = 1$. Nel primo di questi $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ è un punto, negli altri due è isomorfo a una retta proiettiva; in ogni caso $H^1(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) = 0$. Per $k = 3$ le cose sono appena un po' più complicate.

Osservazione. Il primo gruppo di coomologia *dell'interno* $\mathcal{M}_{g,n}$ dello spazio dei moduli non è sempre nullo. Un esempio è dato da $\mathcal{M}_{0,4} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. La situazione è simile per il terzo gruppo di coomologia.

Occupiamoci ora di $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$. In questo gruppo vi sono alcune classi "naturali". Le prime fra queste sono le classi fondamentali delle componenti del bordo. Se Δ_x è una di queste componenti, dove x può stare per *irr* o per a, A , indicheremo con δ_x la classe fondamentale di Δ_x divisa per l'ordine del gruppo di automorfismi di un elemento generico di Δ_x . Vi sono poi altre classi di definizione un po' più complicata. Per descriverle fingeremo che vi sia su $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ una famiglia universale, anche se questo è vero solo "nel senso degli orbifold" e non nel senso usuale del termine. Fingeremo cioè che vi siano un morfismo proprio e piatto $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ e sezioni $\sigma_i, i = 1, \dots, n$, tali che, per ogni $x \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, la classe di isomorfismo della curva n -puntata $(\pi^{-1}(x); \sigma_1(x), \dots, \sigma_n(x))$ sia esattamente x . Porremo poi $\Gamma_i = \sigma_i(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ e indicheremo con ω_π il fascio dualizzante relativo di π . Possiamo definire nuove classi di coomologia ponendo

$$\begin{aligned}\psi_i &= c_1(\sigma_i^*(\omega_\pi)), \\ \kappa_i &= \pi_*(c_1(\omega_\pi(\sum \Gamma_i))^{i+1}).\end{aligned}$$

È chiaro che le ψ_i appartengono ad $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$, mentre κ_i appartiene ad $H^{2i}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$. Chiameremo classi *naturali* (o *tautologiche*) in $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ le classi $\kappa_1, \psi_i, \delta_{irr}, \delta_{a,A}$. Possiamo ora descrivere esattamente il secondo gruppo di coomologia di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

Proposizione 2. a) Se $g > 2$, $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ è liberamente generato dalle classi naturali.

b) $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{2,n})$ è liberamente generato dalle classi naturali, esclusa κ_1 .

c) $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{1,n})$ è liberamente generato dalle classi naturali, escluse $\kappa_1, \psi_1, \dots, \psi_n$, cioè dalle classi del bordo.

d) $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,n})$ è generato dalle classi $\delta_{0,A}$, modulo le relazioni

$$\begin{aligned}\delta_{0,A} &= \delta_{0,A^c}, \\ \sum_{\substack{i,j \in S \\ h,k \notin S}} \delta_{0,S} &= \sum_{\substack{i,h \in S \\ j,k \notin S}} \delta_{0,S} = \sum_{\substack{i,k \in S \\ h,j \notin S}} \delta_{0,S},\end{aligned}$$

per ogni scelta di $A \subset \{1, \dots, n\}$ tale che $|A| \geq 2$ e $|A^c| \geq 2$, e di elementi distinti i, j, h, k di $\{1, \dots, n\}$.

La descrizione di $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,n})$ è dovuta a Keel [9], e non ce ne occuperemo più. Diamo invece una idea della dimostrazione per $g > 0$. I pochi casi nei quali il

Lemma Base non è utilizzabile si trattano direttamente. Poi si procede per doppia induzione su g e n . Usiamo le notazioni del Lemma Base e poniamo

$$X_{ij} = X_i \times_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} X_j.$$

Se un elemento $(x_1, \dots, x_m) \in \bigoplus_i H^2(X_i)$ viene da una classe x appartenente a $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$, deve soddisfare le condizioni di compatibilità

$$(1) \quad x_i|_{X_{ij}} = x_j|_{X_{ij}}.$$

D'altra parte si può supporre, induttivamente, che ognuno degli x_i sia una combinazione lineare di classi tautologiche. Inoltre le restrizioni agli X_i delle classi tautologiche su $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ (e le restrizioni a X_{ij} delle classi tautologiche su X_i) sono descrivibili in modo del tutto esplicito. Possiamo quindi descrivere in modo del tutto esplicito sia gli $(x_1, \dots, x_m) \in \bigoplus_i H^2(X_i)$ che soddisfano (1) sia quelli che vengono da classi tautologiche in $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$. È allora un problema complicato ma elementare di algebra lineare mostrare che questi due spazi coincidono. A questo punto le parti a), b) e c) della Proposizione seguono dal Lemma Base.

Val la pena di osservare che un passo intermedio della dimostrazione della Proposizione 2 è il seguente risultato, che è anche interessante di per sè.

Proposizione 3. *Sia $\xi : \overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ l'applicazione data dall'identificare i punti marcati $n+1$ e $n+2$. Allora*

$$\xi^* : H^k(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) \rightarrow H^k(\overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2})$$

è iniettiva per ogni $k \leq \min(2g-2, g+3)$.

BIBLIOGRAFIA

1. Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, *Calculating cohomology groups of moduli spaces of curves via algebraic geometry*, preprint 1997.
2. Pierre Deligne, David Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, I.H.E.S. Publ. Math. **36** (1969), 75–109.
3. Ezra Getzler, *Intersection theory on $\overline{\mathcal{M}}_{1,4}$ and elliptic Gromov-Witten invariants*, alg-geom/9612004.
4. John Harer, *The second homology group of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math. **72** (1982), 221–239.
5. John Harer, *The third homology group of the moduli space of curves*, Duke Math. J. **65** (1991), 25–55.
6. John Harer, *The fourth homology group of the moduli space of curves*, to appear.
7. John Harer, *Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces*, Ann. Math. **121** (1985), 215–249.
8. John Harer, *The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math. **84** (1986), 157–176.
9. Seàn Keel, *Intersection theory of moduli space of stable N -pointed curves of genus zero*, Trans. AMS **330** (1992), 545–574.

10. Finn F. Knudsen, *The projectivity of the moduli space of stable curves; I* (with David Mumford), *Math. Scand.* **39** (1976), 19–55; *II, III*, *Math. Scand.* **52** (1983), 161–199, 200–212.
11. David Mumford, *Geometric Invariant Theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1965.
12. David Mumford, *Abelian quotients of the Teichmüller modular group*, *J. d'Anal. Math.* **18** (1967), 227–244.
13. Jerome Powell, *Two theorems on the mapping class group of a surface*, *Proc. AMS* **68** (1978), 347–350.