REND. SEM. MAT.
UNIVERS. POLITECN. TORINO
Vol. 38°, 2 (1980)

**Enrico Arbarello - Maurizio Cornalba**

# SU UNA PROPRIETA' NOTEVOLE DEI MORFISMI DI UNA CURVA A MODULI GENERALI IN UNO SPAZIO PROIETTIVO (*)

**Summary:** *We show that a general morphism of a general curve of genus g in a projective space of dimension at least two is a local embedding and is not composed with an involution. We also give a bound for the number of ramification point of any morphism of a general curve of genus g in a projective space. We finally show that a general member of any component of the variety of plane curves of fixed degree and genus has only nodes as singularities.*

**0.** Questa breve nota è dedicata alla esposizione di alcune semplici conseguenze della congettura di Brill e Noether, recentemente dimostrata da Griffiths e Harris [3].

La prima fra queste è che un morfismo "generale" di una curva generale di genere $g$ in uno spazio proiettivo di dimensione almeno due è una immersione locale e non è composto con una involuzione. Più in generale daremo una stima sul numero dei punti di ramificazione di un qualsiasi morfismo di una curva generale di genere $g$ in uno spazio proiettivo. Da ultimo mostreremo che un elemento generale della varietà delle curve piane di grado e genere fissato ha, come sole singolarità, dei nodi.

Come si vede, si tratta di enunciati assai naturali e tutt'altro che sorprendenti. Una loro dimostrazione, tuttavia, sembra richiedere tutta la forza dell'enunciato di Brill e Noether.

Vi è un altro enunciato "naturale" di cui non si troverà, qui, la dimostrazione, e cioè che un morfismo "generale" di una curva a moduli generali

---

*Classificazione per soggetto:* AMS (MOS) 1980 14H10, 14H40, 14H45

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

in uno spazio proiettivo di dimensione pari almeno a tre è una *immersione.* Più esattamente, non verrà affrontato il problema di determinare quale sia la codimensione, all'interno della varietà $G^r_d(C)$ di tutte le serie lineari di grado $d$ e dimensione $r$ su una curva $C$ a moduli generali, della sottovarietà costituita da tutte quelle serie che posseggono una coppia neutra. Presumibilmente tale codimensione è pari a $r-2$. Per poter dimostrare ciò sembra però necessario raffinare l'enunciato di Brill e Noether. In una delle sue versioni questo afferma che

$$H^1(C, N) = 0$$

dove $C$ è una curva a moduli generali e $N$ è il fascio normale a un morfismo "generale" di $C$ in $\mathbf{P}^r$. Non è difficile mostrare che quanto sopra affermato sulla codimensione della varietá delle serie lineari su $C$ di dato grado e dimensione fornite di coppie neutre è sostanzialmente equivalente alla affermazione che

$$H^1(C, N(-p-q)) = 0$$

dove $N$ è il fascio normale a un morfismo $\phi$ di $C$ in $\mathbf{P}^r$, generale tra quelli forniti di coppie neutre, e $p$, $q$ sono una coppia neutra per $\phi$.

Il problema di determinare la dimensione della varietà delle $g^r_d$ su $C$ munite di coppie neutre è solo la prima di una serie di questioni, la successiva fra le quali potrebbe essere quella di determinare la codimensione in $G^r_d(C)$ della varietà delle $g^r_d$ su $C$ corrispondenti a morfismi forniti di un punto di ramificazione. Le argomentazioni svolte nei paragrafi 1 e 2 permettono solo di concludere che questa codimensione è pari almeno a uno. Se ciò è soddisfacente per $r=2$, non lo è certo se $r>2$. Per queste ragioni la limitazione sul numero dei punti di ramificazione di un morfismo di $C$ in $\mathbf{P}^r$ data nel paragrafo 2 è probabilmente molto lontana dall'essere la migliore possibile quando $r>2$.

*Nota.* Tutte le varietà algebriche considerate in questo lavoro sono varietà algebriche complesse. Il termine "curva liscia" indicherà una curva non singolare connessa e proiettiva su $C$.

**1.** Ricordiamo alcuni dei risultati esposti in [1]. Sia $C$ una curva liscia e

$$\phi : C \to \mathbf{P}^r$$

un morfismo. Il *fascio normale* a $\phi$, che denoteremo con il simbolo $N_\phi$, è il conucleo dell'omomorfismo di $\mathcal{O}_C$-moduli

$$\phi_* : \Theta_C \to \phi^*(\Theta_{\mathbf{P}^r}) \tag{1.1}$$

Sia $Z$ il divisore degli zeri di $\phi_*$, che chiameremo il *divisore di ramificazione* di $\phi$. L'omomorfismo (1.1) si estende a un omomorfismo di $\Theta_C(Z)$ in $\phi^*(\Theta_{\mathbf{P}^r})$.

Il conucleo di questo nuovo omomorfismo è un $\mathcal{O}_C$-modulo localmente libero: lo indicheremo nel seguito con il simbolo $N'_\phi$. Notiamo anche che $N'_\phi$ è il quoziente di $N_\phi$ modulo un sottofascio di torsione $\mathcal{K}_\phi$, concentrato su $Z$. Quanto detto finora può essere riassunto nel diagramma commutativo di successioni esatte:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & 0 \arrow[d] & & 0 & 0 \\
& \Theta_C \arrow[dd] \arrow[dr] & & N'_\phi \arrow[u] \arrow[ur] & \\
& & \phi^*(\Theta_{\mathbf{P}^r}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& \Theta_C(Z) \arrow[ur] & & N_\phi \arrow[uu] \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & & & 0 \\
& & & \mathcal{K}_\phi \arrow[uu] & \\
& & & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Ricordiamo che una deformazione infinitesima di $\phi$ è il dato di una deformazione infinitesima

$$\mathscr{C} \to \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\epsilon]$$

di $C$, dove $\mathbb{C}[\epsilon]$ è l'anello dei numeri duali, e di un morfismo di $\mathscr{C}$ in $\mathbf{P}^r$ che estende $\phi$. Ad ogni deformazione infinitesima di $\phi$ è associato un elemento di $H^0(C, N_\phi)$, che è chiamato la *classe di Horikawa* della deformazione in questione; il passaggio alla classe di Horikawa stabilisce una corrispondenza biunivoca tra $H^0(C, N_\phi)$ e l'insieme delle classi di equivalenza di deformazioni infinitesime di $\phi$[4].

Rimandiamo a [1] per una interpretazione, in termini di deformazioni infinitesime, del sottospazio $H^0(C, \mathcal{K}_\phi)$ di $H^0(C, N_\phi)$. Ricordiamo anche che l'immagine, tramite l'omomorfismo cobordo

$$H^0(C, N_\phi) \to H^1(C, \Theta_C)$$

dedotto da (1.2), della classe di Horikawa di una deformazione infinitesima di $\phi$ non è altro che la classe di Kodaira-Spencer della corrispondente deformazione di $C$.

Sia ora $p$ un punto di $C$. L'*indice di ramificazione* di $\phi$ in $p$ è definito come l'ordine con cui $\phi_*$ si annulla nel punto $p$.

Supponiamo che $\phi$ non sia composto con una involuzione, e sia $p$ un punto di $Z$. Se $z$ è una opportuna coordinata locale centrata in $p$ e $w_1, \ldots, w_r$ sono opportune coordinate locali centrate in $\phi(p)$, $\phi$ si scrive, in queste coordinate,

$$w_i = z^{k_i} \xi_i(z) \qquad i = 1, \ldots, r$$

dove

$$\begin{aligned} &\xi_i(0) \neq 0 \qquad i = 1, \ldots, r \\ &k_1 < k_2 < \ldots \\ &k_1 \text{ non divide } k_2 \end{aligned}$$

L'intero $k_1 - 1$ è l'indice di ramificazione di $\phi$ nel punto $p$. L'intero $k_2$ sarà chiamato il *tipo* del punto di ramificazione $p$. Il lemma fondamentale che useremo è il seguente

(1.3) **Lemma** (cf. [1]). *Sia*

$$\mathscr{C} \xrightarrow{p} \Delta = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < 1\}$$

*una famiglia analitica liscia di curve di genere* $g$,

$$\phi : \mathscr{C} \to M$$

*un morfismo analitico di* $\mathscr{C}$ *in una varietà analitica liscia. Poniamo*

$$C_t = p^{-1}(t), \quad \phi_t = \phi_{|C_t}.$$

*Supponiamo che:*

a) $\phi_t$ *non sia composto con una involuzione, per ogni* $t$.

b) *Il numero, l'indice e il tipo dei punti di ramificazione di* $\phi_t$ *non dipendano da* $t$.

*Allora la classe di Horikawa di* $(\mathscr{C}, p, \phi)$, *per* $t = 0$, *non appartiene a* $H^0(C_0, \mathscr{K}_{\phi_0})$, *a meno che non sia nulla.*

Indichiamo ora con $W_d^r(C)$ la varietà (non necessariamente ridotta) delle serie lineari complete su $C$ di grado $d$ e dimensione almeno $r$ (cf. [2] per maggiori dettagli).

La congettura di Brill e Noether, recentemente dimostrata da Griffiths e Harris [3], afferma che, se $C$ è una curva generale di genere $g > 1$ e

$$(1.4) \qquad \begin{cases} 0 < d \leqslant 2g-2 \\ \max(0, d-g) \leqslant r \leqslant d/2 , \end{cases}$$

allora la varietà $W_d^r(C)$ è ridotta e ogni sua componente ha dimensione

$$\rho = g-(r+1)(g-d+r) .$$

In particolare, nelle ipotesi (1.4), $W_d^r(C)$ è vuota se $\rho < 0$; inoltre, se $L$ è un fibrato in rette su $C$ corrispondente a un punto generale di $W_d^r(C)$ e $r \geqslant 1$, $|L|$ non ha punti base.

Sia ora $L$ un fibrato in rette di grado $d$ su $C$ e sia $r$ la dimensione di $|L|$. Supponiamo anche che $|L|$ non abbia punti base e sia

$$\phi : C \to \mathbf{P}^r$$

il morfismo corrispondente a $|L|$. Se $L$ è non speciale, in particolare se $d > 2g-2$, $H^1(C, N_\phi) = 0$ come si mostra facilmente usando la successione di Eulero per il fibrato tangente a $\mathbf{P}^r$. Se invece $d \leqslant 2g-2$, supponiamo che $C$ sia generale nel senso dei moduli.

E' stato mostrato in [1], [2] che la dimensione dello spazio tangente di Zariski a $W_d^r(C)$ nel punto corrispondente a $L$ è

$$\dim(T_L(W_d^r(C))) = \rho + \dim H^1(C, N_\phi) .$$

La congettura di Brill e Noether implica perciò che, se $L$ corrisponde a un punto generale di $W_d^r(C)$, $H^1(C, N_\phi) = 0$.

Notiamo anche che, se $C$ è generale nel senso dei moduli e $r \geqslant 2$, $\phi$ non è composto con una involuzione, con la possibile eccezione del caso in cui $g$ sia pari, $d = g+2$ e $r = 2$ [1]. E' altresì vero che queste possibili eccezioni corrispondono a morfismi $\phi$ *particolari.*

Supponiamo ora che $C$ sia generale nel senso di moduli, che $r \geqslant 2$, e che $L$ corrisponda a un punto generale di una componente di $W_d^r(C)$. Ciò permette di supporre che $\phi$ non sia composto con una involuzione e che numero, indice e tipo dei suoi punti di ramificazione non variino per piccole deformazioni. D'altra parte, poiché $H^1(C, N_\phi) = 0$, vi è una famiglia di deformazioni di $\phi$, parametrizzata da un policilindro $B$, tale che l'applicazione di Horikawa

$$T_0(B) \to H^0(C, N_\phi)$$

sia un isomorfismo [4]. Ciò contraddice il lemma (1.3), a meno che $\phi$ sia non ramificata.

Le considerazioni fin qui svolte hanno perciò come conseguenza la

(1.5) **Proposizione.** *Sia $C$ una curva generale di genere $g$. Siano $r$, $d$ interi non negativi tali che*

$$\begin{array}{ll} r \geqslant 2 & \\ r \geqslant d-g & \text{se } d > 2g-2 \\ \left.\begin{array}{l} r \geqslant d-g \\ \rho = g-(r+1)(g-d+r) \geqslant 0 \end{array}\right\} & \text{se } d \leqslant 2g-2 \end{array}$$

*Se $L$ è un fibrato in rette su $C$ corrispondente a un punto generale di $W^r_d(C)$, $|L|$ non ha punti base. Sia inoltre*

$$\phi : C \to \mathbb{P}^r$$

*il morfismo associato a $|L|$. Allora $\phi$ non è composto con una involuzione ed è una immersione locale.*

Poiché la proprietà di essere una immersione locale è conservata per proiezione generica in uno spazio proiettivo di dimensione almeno due, la proposizione (1.5) si può enunciare, in modo più suggestivo, come segue:

(1.6) *Sia $C$ una curva generale di genere $g$. Siano $r$, $d$ interi positivi, $r \geqslant 2$. Sia*

$$\phi : C \to \mathbb{P}^r$$

*un morfismo non degenere corrispondente a una $g^r_d$ "generale" su $C$. Allora $\phi$ non è composto con una involuzione ed è una immersione locale.*

**2.** Nel paragrafo precedente abbiamo mostrato che un morfismo "generale" di una curva generale di genere $g$ in uno spazio proiettivo di dimensione almeno 2 è una immersione locale. Vogliamo ora usare gli stessi metodi per ottenere limitazioni sul grado del divisore di ramificazione di un *qualsiasi* morfismo non degenere di una curva generale di genere $g$ in uno spazio proiettivo di dimensione almeno 2. Più esattamente vale la seguente

(2.1) **Proposizione.** *Sia $C$ una curva generale di genere $g$. Sia*

$$\phi : C \to \mathbb{P}^r \qquad r \geqslant 2$$

*un morfismo non degenere e non composto con una involuzione. Indichiamo con $d$ il grado di $\phi(C)$.*

*Allora, se indichiamo con $Z$ il divisore di ramificazione di $\phi$, si ha la* *diseguaglianza*

$$\text{grado}(Z) \leqslant \rho + \dim H^1(C, N_\phi) \tag{2.2}$$

*ove si è posto, come di consueto*

$$\rho = g - (r+1)(g-d+r)$$

*Dimostrazione.* Ragioniamo per assurdo, supponendo falsa la proposizione. Vi sono allora una famiglia liscia $\{C_b\}_{b \in B}$ di curve di genere $g$ parametrizzata da un policilindro, tale che, per ogni $b \in B$, l'omomorfismo di Kodaira-Spencer

$$T_b(B) \to H^1(C_b, \Theta_{C_b})$$

sia un isomorfismo, e una famiglia di morfismi non degeneri e non composti con una involuzione

$$\phi_b : C_b \to \mathbb{P}^r$$

tale che, per ogni $b \in B$, il grado del divisore di ramificazione di $\phi_b$ sia superiore a

$$\rho + H^1(C_b, N_{\phi_b}) .$$

Non è restrittivo supporre che numero, indice e tipo dei punti di ramificazione di $\phi_b$ siano indipendenti da $b$. Fissiamo un punto $b$ di $B$, poniamo $C = C_b$, $\phi = \phi_b$, e sia $Z$ il divisore di ramificazione di $\phi$.

Per il lemma (1.3), e tenendo conto dell'azione del gruppo degli automorfismi proiettivi su $\mathbb{P}^r$, si ottiene che

$$\dim H^0(C, N'_\phi) \geqslant 3g - 3 + (r+1)^2 - 1 . \tag{2.3}$$

D'altra parte $N'_\phi$ ha rango $r-1$, e se si denota con $H$ il fibrato iperpiano su $\mathbb{P}^r$ e si pone $L = \phi^*(H)$, segue da (1.2) e dalla successione di Eulero per il fibrato tangente a $\mathbb{P}^r$ che

$$\Lambda^{r-1}(N'_\phi) \simeq L^{r+1} \circ K_C(-Z) .$$

Perciò, per il teorema di Riemann-Roch,

$$\dim H^0(C, N'_\phi) = (r+1)\,d + 2g - 2 - \text{grado}(Z) + (r-1)(1-g) + \dim H^1(C, N'_\phi) .$$

Combinando questa eguaglianza con (2.3), si ottiene che

$$\text{grado}(Z) \leqslant \rho + \dim H^1(C, N'_\phi) .$$

Poiché $H^1(C, N_\phi) = H^1(C, N'_\phi)$, ciò contraddice quanto supposto all'inizio della dimostrazione. Q.E.D.

Ricordiamo che se la $g_d^r$ che definisce $\phi$ è *speciale*, l'ipotesi che $\phi$ non sia composta con una involuzione è automaticamente verificata [1].

Ove fosse dimostrata la congettura di Petri [5], la quale afferma, in linguaggio moderno, che, se $C$ è una curva generale di genere $g$ e

$$\phi : C \to \mathbf{P}^r$$

è un morfismo non degenere, allora $H^1(C, N_\phi) = 0$, la diseguaglianza (2.2) direbbe che

$$\text{grado}(Z) \leqslant \rho \tag{2.4}$$

La congettura di Petri è dimostrata per $r = 1,2$, mentre per $r = 3$ si sa che

$$\dim H^1(C, N_\phi) \leqslant 1$$

(cf. [1]). Perciò dalla proposizione (2.1) si ricava il

(2.5) **Corollario.** *Sia $C$ una curva generale di genere $g$. Sia*

$$\phi : C \to \mathbf{P}^r$$

*un morfismo non degenere e non composto con una involuzione. Sia $d$ il grado di $\phi(C)$ e $Z$ il divisore di ramificazione di $\phi$. Allora:*

a) *Se $r = 2$,*

$$\text{grado}(Z) \leqslant 3d - 2g - 6$$

b) *Se $r = 3$,*

$$\text{grado}(Z) \leqslant 4d - 3g - 11.$$

Anche in questo caso vale l'osservazione che, se la $g_d^r$ corrispondente a $\phi$ è speciale, l'ipotesi che $\phi$ non sia composto con una involuzione è automaticamente verificata.

Anche se la congettura di Petri fosse dimostrata, per $r \geqslant 3$ la diseguaglianza (2.4) non sarebbe, quasi certamente, la migliore possibile. Per $r = 2$, la diseguaglianza data da (2.5) è invece essenzialmente non migliorabile, almeno quando $g \geqslant 2$. Se $g = 0$ oppure $g = 1$ si può ottenere una limitazione migliore, che lasciamo al lettore, sostituendo (2.3) con una stima più precisa.

**3.** Nel paragrafo 1 si è mostrato che una $g_d^r$ generale su una curva generale di genere $g$ definisce, se $r \geq 2$, una immersione locale di $C$ in $\mathbb{P}^r$.

Vogliamo ora esaminare più in dettaglio il caso $r=2$; otterremo risultati più precisi che nel caso generale, validi non solo per curve generali nel senso dei moduli, ma anche per curve generali tra quelle che posseggono una $g_d^2$, per $d$ fissato.

Il risultato che intendiamo dimostrare è il seguente.

(3.1) **Teorema.** *Sia $V$ una componente irriducibile della varietà delle curve piane irriducibili di grado $d$ a genere $g$. Allora*

$$\dim V = 3d + g - 1.$$

*Inoltre un elemento generale di $V$ ha, come sola singolarità, dei nodi.*

L'asserzione sulla dimensione di $V$ appare già, sotto forma diversa, in [1]. Per completezza ne daremo qui una dimostrazione.

Sia dunque $g$ un intero non negativo e sia $\mathcal{M}_g$ lo spazio dei moduli delle curve di genere $g$ [6]. Sia $m_0$ un punto di $\mathcal{M}_g$; esiste allora una famiglia liscia di curve di genere $g$

$$p : \mathcal{C} \to S, \tag{3.2}$$

parametrizzata da una varietà algebrica liscia e connessa $S$, tale che il morfismo naturale di $S$ in $\mathcal{M}_g$ corrispondente a (3.2) sia finito e dominante e abbia immagine contenente $m_0$. Si può inoltre supporre che (3.2) abbia una sezione. Per costruire (3.2) si può, ad esempio, prendere come $S$ un rivestimento opportuno di un aperto dello spazio dei moduli $T$ delle curve di genere $g$ con una struttura di livello $n$, per $n$ abbastanza grande (cf. [6]), e come famiglia (3.2) la famiglia indotta da quella universale esistente su $T$.

Indichiamo ora con $\mathrm{Pic}^d$ la varietà di Picard relativa di (3.2) in grado $d$, e con $\mathcal{W}_d^r$ la sottovarietà di $\mathrm{Pic}^d$ i cui punti corrispondono a coppie $(s, \gamma)$, dove $s \in S$ e $\gamma$ è una serie lineare completa di grado $d$ e di dimensione almeno $r$ su $p^{-1}(s)$. Se poniamo $\delta = 0$ per $g > 1$, $\delta = 1$ se $g = 1$, $\delta = 3$ se $g = 0$, $\mathrm{Pic}^d$ è liscia di dimensione $4g - 3 + \delta$, mentre $\mathcal{W}_d^r$ è localmente una varietà determinantale, e più precisamente (cf. [1]) è definita localmente dall'annullarsi dei minori di ordine $m-r$ di una matrice olomorfa $m \times n$, dove

$$m - n = d - g + 1 .$$

Per una descrizione piú precisa di $\mathcal{W}_d^r$ rimandiamo a [1]. Quando $r \geq d-g$, cioè quando $m-r-1 \leq n$, segue dalla descrizione determinantale di $\mathcal{W}_d^r$ che

$$\dim \mathcal{W}_d^r \geq 4g-3+\delta-[m-(m-r-1)][n-(m-r-1)] = 4g-3+\delta-(r+1)(g-d+r).$$

In [1] è stata costruita la varietà $\mathcal{G}^r_d$ che parametrizza le coppie $(s, \gamma')$, dove $s \in S$ e $\gamma'$ è una $g^r_d$ (anche non completa) su $p^{-1}(s)$. Poiché $\mathcal{G}^r_d$ surietta su $\mathcal{W}^r_d$, si ha, sempre nell'ipotesi che $r \geqslant d-g$,

$$\dim \mathcal{G}^r_d \geqslant 4g-3+\delta-(r+1)(g-d+r) . \tag{3.3}$$

Se invece $r \leqslant d-g$, si ha

$$\mathcal{W}^r_d = \mathrm{Pic}^d$$

e la fibra generale della proiezione di $\mathcal{G}^r_d$ su $\mathcal{W}^r_d$ è la grassmanniana degli $(r+1)$-piani in uno spazio vettoriale di dimensione $d-g+1$, perciò è ancora valida la (3.3). Nel caso particolare in cui $r=2$, la (3.3) dice che

$$\dim \mathcal{G}^2_d \geqslant 3d+g-9+\delta .$$

Da un punto di vista più geometrico questa disuguaglianza significa che

$$\dim V \geqslant 3d+g-1 .$$

Viceversa, sia $\Gamma \subset \mathbf{P}^2$ un elemento generale di $V$. Indichiamo con $C$ la normalizzata di $\Gamma$ e con

$$\phi : C \to \mathbf{P}^2$$

il morfismo di normalizzazione. Per il Lemma (1.3) si ha

$$\dim H^0(C, N'_\phi) \geqslant 3d+g-1 \geqslant g+1 .$$

Poiché $N'_\phi$ è un fibrato in rette, ne segue che

$$H^1(C, N_\phi) = H^1(C, N'_\phi) = 0 \tag{3.4}$$

e, ragionando come nella dimostrazione di (1.5), che $\phi$ non è ramificato e perciò $N_\phi = N'_\phi$. Usando poi il diagramma (1.2) e la successione di Eulero per il fibrato tangente a $\mathbf{P}^2$ si ottiene

$$\mathrm{grado}(N_\phi) = 2g-2+3d \tag{3.5}$$

e quindi, per il teorema di Riemann-Roch,

$$\dim H^0(C, N_\phi) = 3d+g-1 .$$

La dimensione di $V$ è perciò pari a $3d+g-1$.

Si è già mostrato che $\phi$ è una immersione locale. Supponiamo ora che vi sia un punto singolare $q$ di $\Gamma$ in cui due rami hanno ordine di contatto $h > 1$. Siano $p_1$, $p_2$ i due punti di $\phi^{-1}(q)$ corrispondenti a questi due rami. Si deduce da (3.5) che

$$H^1(C, N_\phi(-p_1 - p_2)) = 0$$

e perciò che $N_\phi$ possiede una sezione $s$ che si annulla in $p_1$ ma non in $p_2$. Per (3.4) questa classe non è ostruita e vi è perciò una famiglia di morfismi

$$\phi_t : C_t \to \mathbf{P}^2$$

parametrizzata da un disco centrato nell'origine di $\mathbf{C}$, tale che $C_0 = C$, $\phi_0 = \phi$, e avente $s$ come classe di Horikawa per $t = 0$. Mostreremo che, per ogni $t \neq 0$ e sufficientemente piccolo, i due rami di $\Gamma$ in $q$ corrispondenti a $p_1$, $p_2$ vengono deformati in archi analitici che non hanno punti di contatto di ordine $h$ o superiore, in contraddizione con la generalità di $\Gamma$.

Per convincersi di ciò si può ragionare come segue. Siano

$$f_t(z), \qquad g_t(z), \qquad z \in D = \{z \in \mathbf{C} \,\big|\, |z| < \epsilon\},$$

archi analitici in $\mathbf{C}^2$ dipendenti olomorficamente dal parametro $t$ ($t$ varia in un intorno di $0 \in \mathbf{C}$). Supponiamo che

$$\frac{\partial f_t}{\partial z}(z) \neq 0 \qquad \frac{\partial g_t}{\partial z}(z) \neq 0 \qquad \forall z,t,$$

che $f_0(D)$, $g_0(D)$ abbiano un contatto di ordine $h > 1$ in $0 = f_0(0) = g_0(0)$ e che le chiusure di $f_0(D)$, $g_0(D)$ non abbiamo altri punti di intersezione. Supporremo inoltre che

$$\text{(3.6)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_t}{\partial t}(0)\Big|_{t=0} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial g_t}{\partial t}(z)\Big|_{t=0} \text{ e } \dfrac{\partial g_0}{\partial z}(z) \quad \text{sono indipendenti per ogni } z. \end{cases}$$

Vogliamo mostrare che per $t \neq 0$ e sufficientemente piccolo, $g_t(D)$ e $f_t(D)$ non hanno contatti di ordine $h$.

Non è restrittivo supporre che

$$\text{(3.7)} \qquad f_t(z) = (z, 0)$$

Scriviamo

$$g_t(z) = (a_t(z), b_t(z)).$$

Ragionando per assurdo supponiamo che esista $z(t) \in D$ (necessariamente unico) per cui

$$(3.8) \qquad \frac{\partial^i b_t}{\partial z^i}(z(t)) = 0 \qquad i = 0, \dots, b.$$

Poiché deve essere

$$\frac{\partial^{b+1} b_t}{\partial z^{b+1}}(z(t)) \neq 0,$$

per il teorema delle funzioni implicite $z(t)$ è funzione olomorfa di $t$. Differenziando rispetto a $t$ l'indentità

$$b_t(z(t)) = 0$$

e usando (3.8) si ottiene che

$$\frac{\partial b_t}{\partial t}(0)\Big|_{t=0} = 0$$

in contraddizione con (3.6) e (3.7).

Tutti i rami di $\Gamma$ in ogni suo punto singolare si tagliano perciò trasversalmente. Supponiamo che $\Gamma$ possieda un punto $n$-uplo $q$, con $n > 2$. Siano $p_1, \dots, p_n$ i punti di $C$ che hanno $q$ come immagine; si noti che $d > n$. In virtù di (3.5)

$$H^1(C, N_\phi(-p_1 - \dots - p_n)) = 0,$$

e vi è perciò una sezione $s$ di $N_\phi$ che si annulla in $p_2, \dots, p_n$ ma non in $p_1$. Segue da (3.4) che questa classe non è ostruita ed esiste perciò una deformazione

$$\phi_t : C_t \to \mathbb{P}^2$$

parametrizzata da un disco centrato nell'origine di $\mathbb{C}$ e tale che $C_0 = C$, $\phi_0 = \phi$, avente $s$ come classe di Horikawa per $t = 0$. Per $t \neq 0$ il punto $n$-uplo $q$ viene deformato in un numero finito di punti multipli aventi tutti molteplicità minore di $n$. Il supporre che $\Gamma$ abbia punti di molteplicità superiore a due porta perciò alla conclusione che $\Gamma$ non è generale, contro le ipotesi.

Ciò conclude la dimostrazione di (3.1).

## BIBLIOGRAFIA

[1] E. Arbarello e M. Cornalba, *Su una congettura di Petri*, di prossima pubblicazione in Comm. Math. Helv.

[2] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths e J. Harris, *Topics in the theory of algebraic curves*, di prossima pubblicazione.

[3] P. Griffiths e J. Harris, *The dimension of the variety of special linear systems on a general curve*, Duke Math. J. 47 (1980), 233-272.

[4] E. Horikawa, *on deformations of holomorphic maps* I, J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 372-396, II, ibid. 26 (1974), 647-667.

[5] K. Petri, *Über Spezialkurven* I, Math. Ann. 93 (1924), 182-209.

[6] H. Popp, *Moduli theory and the classification theory of algebraic varieties*, Lecture Notes in Mathematics vol. 620, Berlin – New York 1977.

ENRICO ARBARELLO, Department of Mathematics, Harvard University e Istituto Matematico "G. Castelnuovo", Università di Roma.
MAURIZIO CORNALBA, Istituto di Matematica, Università di Pavia.

*Lavoro pervenuto in redazione il 10/VIII/1980*

*Nota aggiunta all'atto della correzione delle bozze:*

Il Teorema (3.1) è stato ottenuto indipendentemente da O. Zariski (comunicazione personale). La "Congettura di Petri" è stata recentemente dimostrata da D. Gieseker (Stable curves and special divisors I, preprint). La diseguaglianza (2.4) è perciò verificata per ogni morfismo in $\mathbf{P}^r, r \geqslant 2$, non degenere e non composto con una involuzione, di una curva generale di genere $g$.