M. CORNALBA
Università di Pavia

IL LUOGO SINGOLARE DELLO SPAZIO DEI MODULI DELLE CURVE

SUNTO. — Per ogni intero positivo g, si determinano esplicitamente tutte le componenti irriducibili del luogo singolare dello spazio dei moduli delle curve algebriche lisce di genere g e la loro dimensione.

Il problema che desidero trattare è quello di descrivere tutte le componenti del luogo singolare di M_g, lo spazio dei moduli delle curve lisce di genere g sul campo complesso. Questo problema è stato risolto in [C], su cui questa esposizione si basa.

Iniziamo con i casi « classici »:

— $g = 0$: $M_0 =$ un punto.

— $g = 1$: $M_1 = \mathbb{C}$.

— $g = 2$: M_2 ha un solo punto singolare, corrispondente alla curva piana di equazione

$$y^5 = x(x - 1)\,.$$

Questo ultimo risultato è dovuto a Igusa [I] e può essere ritrovato con tecniche simili a quelle che userò nel caso in cui $g \geq 3$, al quale d'ora in poi mi limiterò, salvo avviso.

E' opportuno richiamare alcune conseguenze elementari del teorema che garantisce l'esistenza di una deformazione universale per ogni curva di genere maggiore di 1. Sia dunque C una curva di genere $g \geq 2$ con deformazione universale

$$f : \mathcal{C} \to T \ni \tau\,, \qquad f^{-1}(\tau) \cong C\,.$$

Il gruppo degli automorfismi di C, che indico con $\mathrm{Aut}(C)$, agisce su $\mathcal{C}$ e su T in modo equivariante, e si ha che:

$$f^{-1}(t) \cong f^{-1}(s) \Longleftrightarrow \gamma(t) = s \text{ per qualche } \gamma \in \mathrm{Aut}(C).$$

Più esattamente, se $[C]$ è il punto di M_g corrispondente a C, vi è un intorno U di $[C]$ tale che

$$U \cong T/\mathrm{Aut}(C);$$

il teorema di purezza del luogo di diramazione implica allora che $[C]$ è singolare in M_g se il luogo dei punti $t \in T$ tale che $\mathrm{Aut}(f^{-1}(t)) \neq 1$ ha codimensione > 1. Ora $\{t \in T | \mathrm{Aut}(f^{-1}(t)) \neq 1\}$ ha codimensione 1 solo se $g = 3$ e C è iperellittica. Se $g = 3$ e C è iperellittica, e γ è l'involuzione iperellittica, γ agisce su T, in coordinate opportune, come

$$(z_1, \dots, z_6) \mapsto (-z_1, z_2, \dots, z_6),$$

quindi $T/\langle \gamma \rangle$ è liscia in $[C]$ e, sempre per il teorema di purezza del luogo di diramazione, M_g è liscia in $[C]$ se e solo se $\mathrm{Aut}(C) = \langle \gamma \rangle$.

CONCLUSIONE: Poniamo

$$S_g = \text{luogo dei punti } [C] \in M_g \text{ con } \mathrm{Aut}(C) \neq 1.$$

Allora

$$\mathrm{Sing}(M_g) = \begin{cases} S_g & \text{se } g \geq 4, \\ (S_g - \text{luogo iperellittico}) \cup \\ \{[C] | C \text{ iperellittica con } \mathrm{Aut}(C) \neq \langle \gamma \rangle\} & \text{se } g = 3. \end{cases}$$

Ci siamo quindi ridotti, almeno se $g \geq 4$, al problema di trovare le componenti di S_g. Questo è un caso particolare del problema più generale di determinare, per ogni gruppo finito G, la sottovarietà (localmente chiusa) di M_g corrispondente alle curve C con $\mathrm{Aut}(C) = G$. Questo è però un problema troppo difficile: in particolare comprende il problema di trovare tutti i gruppi finiti che sono gruppi di automorfismi di curve di dato genere.

Supponiamo che $[C] \in S_g$. Allora C ha un automorfismo σ di ordine primo p. Poniamo

$$\Gamma = C/\langle \sigma \rangle,$$
$$\gamma = \text{genere di } \Gamma,$$

e siano $q_1, \ldots, q_n \in \Gamma$ i punti di diramazione di

$$\pi : C \to \Gamma$$

La formula di Riemann-Hurwitz dà:

(1) $$2g - 2 = p(2\gamma - 2) + (p-1)n .$$

Dunque

$$S_g = \bigcup_{p,n} S_{g,p,n} ,$$

dove $S_{g,p,n}$ è la sottovorietà di M_g:

$$S_{g,p,n} = \{\text{rivestimenti ciclici di ordine primo } p, \text{ ramificati in } n \text{ punti, di curve di genere } \gamma, \text{ con } \gamma \text{ dato da 1)}\}.$$

Tutti i rivestimenti ciclici di grado p

$$\pi : C \to \Gamma$$

diramati in n punti $q_1, \ldots, q_n$ si ottengono come segue. Si scelgono:

— interi a_i, $i = 1, \ldots, n$, con

$$0 < a_i < p ,$$

$$\sum a_i \equiv 0 \pmod{p};$$

— un fibrato in rette L su Γ con

$$L^p = \mathcal{O}\left(\sum a_i q_i\right) .$$

Si pone

$$C' = \varphi^{-1}(1), \; C = \text{normalizzata di } C' ,$$

dove $\varphi : L \to \mathcal{O}\left(\sum a_i q_i\right)$ è l'elevamento a potenza p-esima e la costante 1 è vista come sezione di $\mathcal{O}\left(\sum a_i q_i\right)$. Indichiamo con

$$S(p, \gamma; a_1, \ldots, a_n)$$

la varietà delle curve così costruite. Si osservi che:

i) I valori possibili per n sono:

$$0, 2, 3, \dots \ (non\ 1)$$

ii) Se $1 \leq b < p$, e rimpiazziamo

$$L \mapsto L^b$$
$$a_i \mapsto \text{resto di } b \cdot a_i (\text{mod. } p)$$

riotteniamo lo stesso rivestimento.

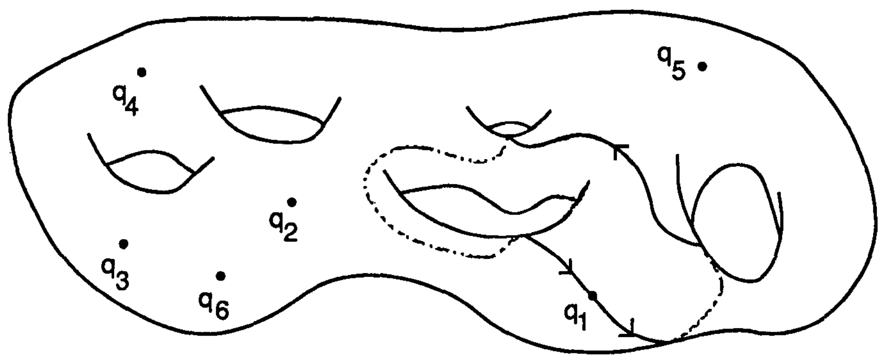
Il fibrato L e gli a_i sono determinati da $\pi : C \to \Gamma$ a meno di questa ambiguità. In particolare

$$S(p, \gamma ; a_1, \dots, a_n) = S(p, \gamma ; c_1, \dots, c_n)$$

se c'è b con

$$0 < b < p$$
$$a_i \equiv bc_i \ (\text{mod. } p) \ \forall i$$

Osservazione: $S(p, \gamma ; a_1, \dots, a_n)$ è irriducibile. Indichiamo come questo può essere dimostrato nel caso più semplice, quello cioè in cui $n > 0$. Costruiamo un rivestimento $\pi : C \to \Gamma$ diramato su $a_1 q_1 + \dots + a_n q_n$, dove $q_2, \dots, q_n$ sono *fissi* e q_1 *variabile*. Facciamo muovere q_1 lungo un cammino chiuso con classe di omologia ξ:



Allora, nella Jacobiana di Γ:

$$L_{\text{finale}} - L_{\text{iniziale}} = \xi / p .$$

Quindi la monodromia agisce transitivamente sui fogli del rivestimento:

$$S(p, \gamma; a_1, \ldots, a_n) \to M_{\gamma, n},$$

dove $M_{\gamma,n}$ è la varietà (irriducibile) dei moduli delle curve Γ di genere γ n-puntate.

Ora sappiamo che le componenti di S_g sono da cercare tra le varietà $S(p, \gamma; a_1, \ldots, a_n)$ con

$$2g - 2 = p(2\gamma - 2) + (p - 1)\, n .$$

Vanno scartate *solo quelle* che sono contenute in altre varietà della forma $S(p', \gamma'; b_1, \ldots, b_m)$.

Dobbiamo dunque rispondere alla seguente:

DOMANDA: quando accade che

$$S(p, \gamma; a_1, \ldots, a_n) \subset S(p', \gamma'; b_1, \ldots, b_m)$$

per qualche scelta di $p', \gamma', b_1, \ldots, b_m$?

A ciò risponde per il teorema principale di [C].

RISPOSTA: *Praticamente mai*; le sole eccezioni, se gli a_i sono normalizzati in modo che $1 = a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, sono le seguenti:

i) $\gamma = 0$, $n = 3$, $a_2 = 1$ (o $a_2 = a_3$).

ii) $\gamma = 0$, $n = 3$, a_2 è una radice cubica non banale di 1 modulo p.

iii) $\gamma = 0$, $n = 4$, $a_2 = 1$, $a_3 = a_4 = p - 1$.

iv) $\gamma = 1$, $n = 2$.

v) $\gamma = 2$, $n = 0$.

Supponiamo ora che $\pi : C \to \Gamma$ corrisponda a un elemento generale di $S(p, \gamma; a_1, \ldots, a_n)$. *Tranne che nei casi eccezionali* i)-v) si ha che:

$$\mathrm{Aut}(C) = \mathbf{Z} / (p) .$$

In tutti i casi eccezionali C ha un automorfismo che copre un automorfismo α non banale della curva n-puntata $(\Gamma, q_1, \ldots, q_n)$. Per esempio:

— caso ii): α permuta ciclicamente q_1, q_2, q_3.

— caso v): α è l'involuzione iperellittica.

In effetti i casi i)-v) corrispondono ai soli casi in cui la curva n-puntata *generale* $(\Gamma, q_1, \ldots, q_n)$ possiede automorfismi non banali.

Ora *conosciamo esattamente le componenti di* S_g per $g \geq 3$; sono le varietà $S(p, \gamma; a_1, \ldots, a_n)$ tali che:

$$
\begin{aligned}
&p \text{ è primo},\\
&0 < a_i < p,\\
&\sum a_i \equiv 0 \pmod{p},\\
&2g - 2 = p(2\gamma - 2) + (p-1)n,
\end{aligned}
$$

escluse le eccezioni i)-v).

Conosciamo anche la dimensione di $S(p, \gamma, a_1; \ldots, a_n)$: la condizione $g \geq 2$ implica che $(\Gamma, q_1, \ldots, q_n)$ è sempre una curva n-puntata *stabile*, quindi un conto di parametri alla Riemann dà:

$$\dim(S(p, \gamma; a_1, \ldots, a_n)) = 3\gamma - 3 + n .$$

CURIOSITÀ:

1) M_g ha punti singolari isolati $\Longleftrightarrow 2g+1$ è primo e $g \geq 2$. Questi punti corrispondono a rivestimenti $(2g+1)$-upli di $\mathbb{P}^1$ diramati in 3 punti (e non ricadenti nei casi i), ii) se $g \geq 4$). Per esempio, i punti singolari isolati di M_8 sono

$$S(17,0;1,2,14) \text{ e } S(17,0;1,3,13).$$

2) Si possono calcolare algoritmicamente le componenti di S_g. Come esempio, elenchiamo le componenti di S_6 e di S_{10}; scriveremo $a : b$ per indicare a ripetuto b volte.

LE COMPONENTI DI S_6.

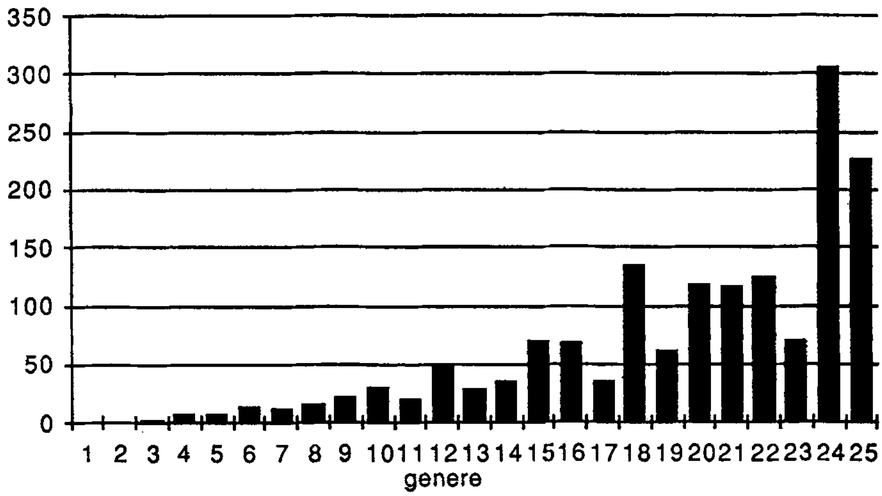
dimensione	
0	$S(13,0;1,2,10)$
1	$S(7,0;1:3,4)$ $S(7,0;1:2,2,3)$ $S(7,0;1,2,5,6)$
2	$S(5,0;1:5)$ $S(5,0;1:3,3,4)$ $S(5,0;1:2,2:2,4)$
5	$S(3,0;1:7,2)$ $S(3,0;1:4,2:4)$ $S(3,1;1:4,2)$ $S(3,2;1,2)$
8	$S(2,3;1:2)$
9	$S(2,2;1:6)$
10	$S(2,1;1:10)$
11	$S(2,0;1:14)$

LE COMPONENTI DI S_{10}.

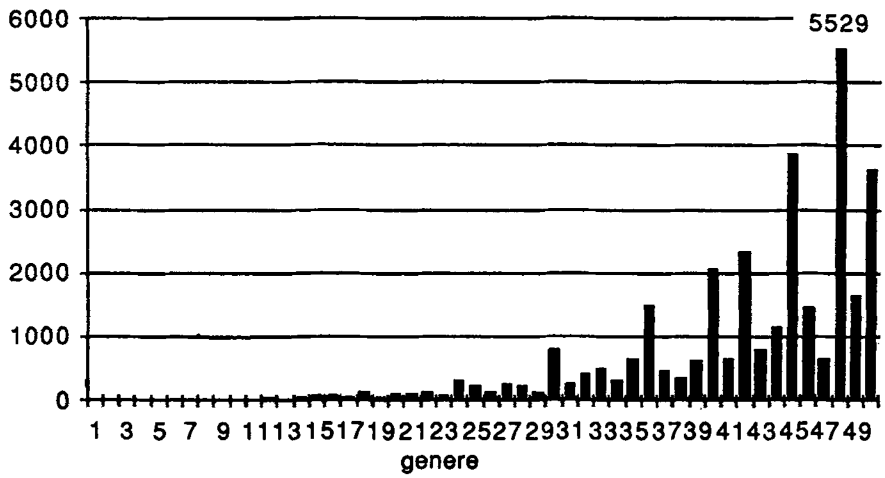
dimensione	
1	$S(11,0;1:3,8)$ $S(11,0;1:2,2,7)$ $S(11,0;1:2,3,6)$ $S(11,0;1:2,4,5)$ $S(11,0;1,2,3,5)$ $S(11,0;1,2,9,10)$ $S(11,0;1,3,8,10)$
3	$S(7,1;1:2,5)$ $S(7,1;1,2,4)$
4	$S(5,0;1:6,4)$ $S(5,0;1:5,2,3)$ $S(5,0;1:4,2:3)$ $S(5,0;1:4,3,4:2)$ $S(5,0;1:3,2:2,4:2)$ $S(5,0;1:3,2,3:2,4)$
5	$S(5,2;1,4)$
9	$S(3,0;1:12)$ $S(3,0;1:9,2:3)$ $S(3,0;1:6,2:6)$ $S(3,1;1:9)$ $S(3,1;1:6,2:3)$ $S(3,2;1:6)$ $S(3,2;1:3,2:3)$ $S(3,3;1:3)$ $S(3,4)$
14	$S(2,5;1:2)$
15	$S(2,4;1:6)$
16	$S(2,3;1:10)$
17	$S(2,2;1:14)$
18	$S(2,1;1:18)$
19	$S(2,0;1:22)$

I due grafici che seguono riportano il numero di componenti di S_g, genere per genere.

IL NUMERO DI COMPONENTI DI S_g, PER $g \leq 25$.



IL NUMERO DI COMPONENTI DI S_g, PER $g \leq 50$.

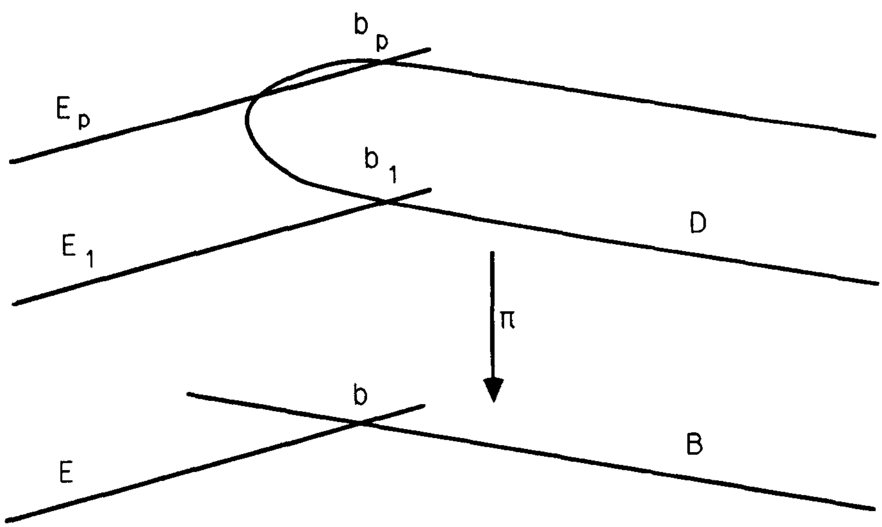


Diamo ora uno schizzo della dimostrazione del risultato principale di [C]. Sia $\pi : C \rightarrow \Gamma$ un rivestimento ciclico p-uplo, con p primo e Γ generale di genere γ, diramato in $\sum a_i q_i$, dove i q_i sono punti generali di Γ. Supponiamo che il genere di C sia $g \geq 3$.

LEMMA CRUCIALE. $\mathrm{Aut}(C/\Gamma)$ è normale in $\mathrm{Aut}(C)$, con le possibili eccezioni dei casi $\gamma = 0$, $n = 3$ e $\gamma = 1$, $n = 2$.

Supponendo dimostrato il lemma, la conclusione è immediata, se si escludono le eccezioni contemplate dal lemma: se $\mathrm{Aut}(C/\Gamma) \neq \mathrm{Aut}(C)$, un elemento di $\mathrm{Aut}(C)$ discende a un automorfismo non banale di $(\Gamma, q_1, ..., q_n)$; ma, come si è detto, i casi eccezionali i)-v) corrispondono ai soli spazi di moduli di curve stabili n-puntate il cui elemento generale ha automorfismi non banali. I casi $\gamma = 0$, $n = 3$ e $\gamma = 1$, $n = 2$ si trattano direttamente.

Il lemma si dimostra per induzione multipla e per degenerazione a curve singolari. L'induzione principale è su γ, a partire da $\gamma = 1$, $n \geq 3$ oppure da $\gamma = 2$, $n = 0,2$. Il passo induttivo (da genere γ a genere $\gamma + 1$) è per degenerazione a



dove $D \rightarrow B$ è un rivestimento p-uplo ($p = 2$ nel disegno) di una curva generale B di genere γ, ramificato in n punti generali, b è un punto generale di B, E è una curva ellittica generale di cui $E_1, \ldots, E_p$ sono copie.

Posto $F = D \cup (\cup E_i)$, $\mathrm{Aut}(F)$ è prodotto semidiretto di

$$\mathbb{Z}/(p) = \mathrm{Aut}(D, \pi^{-1}(b)) \quad \text{e} \quad \mathrm{Aut}(E, b)^p;$$

il primo gruppo agisce sul secondo permutandone i fattori. D'altra parte valgono le seguenti identificazioni:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{deformazioni di } F \text{ al primo ordine}\} & = & \mathrm{Ext}^1(\Omega_F^1, \mathcal{O}_F) \\ \cup & & \cup \\ \{\text{deformazioni localmente banali di } F\} & = & H^1(\mathcal{H}om(\Omega_E^1, \mathcal{O}_F)) \end{array}$$

e il quoziente di questi spazi vettoriali si identifica ad $H^0(\mathcal{E}xt^1(\Omega_F^1, \mathcal{O}_F))$. Inoltre un automorfismo α di F si deforma lungo $v \in \mathrm{Ext}^1(\Omega_F^1, \mathcal{O}_F)$ se e solo se $\alpha(v) = v$: se poi v liscia $F \to E \cup B$, allora v induce un generatore in ogni addendo di

$$H^0(\mathcal{E}xt^1(\Omega_F^1, \mathcal{O}_F)) = \bigoplus_i \mathcal{E}xt^1(\Omega_F^1, \mathcal{O}_F)_{b_i}.$$

Osserviamo che, se $\alpha(v) = v$ e $\alpha|_D = 1_D$, allora $\alpha = 1_F$, e perciò il sottogruppo di $\mathrm{Aut}(F)$ costituito dagli automorfismi di F che si deformano lungo v è $\mathbb{Z}/(p)$; infatti, se δ_i è l'elemento non banale di $\mathrm{Aut}(E_i, b_i)$, *δ_i agisce come -1 su $\mathcal{E}xt^1(\Omega_F^1, \mathcal{O}_F)_{b_i}$*, e lo stesso sarebbe vero di α se fosse $\alpha|_{E_i} = \delta_i$. Questo conclude il passo induttivo. I casi iniziali dell'induzione si dimostrano con argomenti di degenerazione simili a quello presentato, a partire dai casi base $\gamma = 0$, $n = 3$ e $\gamma = 1$, $n = 2$, che si trattano direttamente.

Abbiamo indicato come si può determinare S_g, e di conseguenza il luogo singolare di M_g per $g \geq 4$; trattiamo ora il caso $g = 3$. Una curva C di genere 3 è un punto singolare di M_3 se e solo se C appartiene a un $S(p, \gamma; a_1, \cdot, a_n)$ diverso dal luogo iperellittico. Le varietà in questione sono

$$\begin{aligned} &S(3,0;1,1,1,1,2), \\ &S(7,0;1,1,5), \\ &S(7,0;1,2,4), \\ &S(2,1;1,1,1,1), \\ &S(3,1;1,2), \\ &S(2,2). \end{aligned}$$

Le sole inclusioni tra queste sono

$$S(2,2) \subset S(2,1;1,1,1,1),$$
$$S(3,1;1,2) \subset S(2,1;1,1,1,1),$$
$$S(7,0;1,2,4) \subset S(3,1;1,2).$$

Dimostriamo, per esempio, la seconda. Sia C un rivestimento triplo di una curva ellittica E, diramato in q_1, q_2. L'automorfismo σ di E che scambia q_1 e q_2 si solleva a $\tau \in \mathrm{Aut}(C)$ con $\tau^2 = 1$. Se Q è fisso per σ e $Q_1, Q_2, Q_3 \in C$ si proiettano su Q, e τ commuta con un generatore di $\mathrm{Aut}(C/E)$, allora τ lascia fissi Q_1, Q_2 e Q_3. Poiché σ ha 4 punti fissi, τ ne avrebbe 12, il che è vietato dalla formula di Riemann-Hurwitz. Quindi τ non commuta con un generatore di $\mathrm{Aut}(C/E)$, lascia fisso uno solo tra i Q_i, e quindi ha 4 punti fissi, come si voleva.

In conclusione

$$\mathrm{Sing}(M_3) = S(3,0;1,1,1,1,2) \cup S(2,1;1,1,1,1) \cup S(7,0;1,1,5).$$

SUMMARY. — For every positive integer g, we explicitly determine all irreducible components of the singular locus of the moduli space of smooth genus g algebraic curves and their dimension.

BIBLIOGRAFIA

[C] - CORNALBA M., On the locus of curves with automorphisms, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 149 (1987), 135-151.

[I] - IGUSA J.-I., Arithmetic variety of moduli for genus two, *Ann. Math.* 72 (1960), 612-649.