Eugenio Beltrami

nella comunità matematica italiana del secondo ’800

Maurizio Cornalba

UNIVERSITÀ DI PAVIA

Matematici nella storia

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, 20 novembre 2024

I primi anni

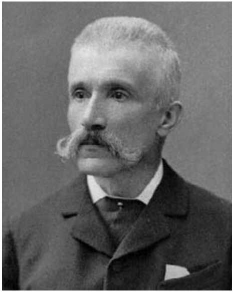
Eugenio Beltrami nasce nel 1835 a Cremona da una famiglia di tradizioni artistiche (il nonno paterno Giovanni è un famoso incisore, il padre Eugenio un miniatore, la madre Elisa Barozzi musicista e poetessa).

I genitori partecipano ai moti del '48. Dopo la sollevazione di Cremona la madre si aggrega alla spedizione dei cremonesi in Trentino. Dopo la sconfitta piemontese nella prima guerra di indipendenza il padre si rifugia in Piemonte, poi in Francia dove morirà nel 1854 senza più rientrare in Italia.

La sua educazione è curata dalla madre e dal nonno. Nel 1853 si iscrive alla Facoltà Matematica dell'Università di Pavia e diviene allievo del collegio Ghislieri.

Alla scuola matematica di Antonio Bordoni

Antonio Bordoni (1789 -1860) nella prima metà del secolo aveva creato a Pavia una importante scuola dalla quale uscirono molti dei maggiori matematici italiani del secondo ’800. Tra questi sono allora presenti a Pavia Francesco Brioschi, Luigi Cremona, Felice Casorati.



All’epoca la figura dominante della scuola, anche per la maggiore anzianità, è Brioschi. Beltrami segue un suo corso e a lui e a Cremona farà riferimento per aiuto e consigli negli anni seguenti.

Altri allievi di Bordoni

- Gaspare Mainardi, Abbiategrasso (MI) 1800 - Lecco 1879
- Francesco Cattaneo, Pavia 1811 - Pavia 1873
- Giovanni Codazza, Milano 1816 - Milano 1877
- Luigi Contratti, Verolavecchia (BS) 1819 - Verolavecchia (BS) 1867
- Delfino Codazzi, Lodi 1824 - Pavia 1873

Tutti professori presso l'Università di Pavia (e non solo)

Alla scuola matematica di Antonio Bordoni

Anni dopo, in una lettera a Cremona, Beltrami confesserà di non essere stato uno studente particolarmente diligente:

> ...Il corso universitario, io l'ho compiuto (parte per leggerezza, parte per quell'indolenza che accompagna ordinariamente il malanimo cagionato dalle frequenti avversità casalinghe) seguendo il malvezzo di studiare quel tanto che basti per passare gli esami...

Nel 1855 viene espulso dal collegio per tumulti contro il rettore, e forse perché sospettato di attività politica sovversiva.

Non più in grado di mantenersi agli studi, anche per la morte del nonno paterno nel 1854, abbandona l'università nel 1856 e trova un impiego a Verona presso la direzione delle ferrovie del Lombardo-Veneto.

Autodidatta

Dopo la seconda guerra di indipendenza l'ufficio in cui Beltrami lavora si trasferisce a Milano. Qui Beltrami, consigliato da Brioschi, ritorna con nuovo spirito agli studi matematici:

> . . . formai recisamente il proposito di rifarmi a studiare la matematica, e (questa è la sola cosa di cui sinceramente mi lodo) tolsi a studiare con tutta diligenza una dopo l'altra l'aritmetica, l'algebra, la geometria, la trigonometria, l'algebra superiore e il calcolo, come avrebbe fatto uno che avesse percorso tutt'altra Facoltà, che la matematica . . .

La mancanza della laurea gli preclude l'insegnamento secondario, e anche una carriera nel genio militare, per la quale aveva presentato più volte domanda.

I suoi progressi negli studi matematici sono però rapidi, nonostante il peso dal lavoro presso le ferrovie, e il suo valore comincia a essere conosciuto.

Professore a Bologna (1862-63)

Nel 1861 escono i primi lavori di Beltrami:

- Intorno ad alcuni sistemi di curve piane
- Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppanti

Nell'ottobre 1862 Brioschi, divenuto segretario generale del Ministero dell'Istruzione, nomina Beltrami professore straordinario di Algebra Complementare e Geometria Analitica presso l'università di Bologna.

Senza laurea! Senza concorso! Per decreto!

A Bologna incontra di nuovo Cremona, che dal 1860 ricopre la cattedra di Geometria superiore. Resta però a Bologna solo un anno. Nel 1863 Enrico Betti gli offre la posizione di ordinario di Geodesia a Pisa. Beltrami inizialmente pensa di declinare, non sentendosi all'altezza del compito, ma alla fine è convinto da Cremona ad accettare.

Pisa (1864-66)

Giunge a Pisa all'inizio del 1864, dopo quattro mesi di intensa preparazione a Milano, durante i quali collabora con l'astronomo Giovanni Schiaparelli, suo coetaneo.

A Pisa stringe amicizia con Betti e incontra Riemann, che risiede a Pisa dall'ottobre 1863 all'aprile 1865.

Ha inizio il periodo forse scientificamente più produttivo della vita di Beltrami. Le conversazioni con Betti e forse anche con Riemann hanno una influenza profonda e duratura su di lui, che viene esposto alle idee di Riemann sulle funzioni di variabile complessa e sulla natura dello spazio.

Pisa (1864-66)

Si interessa della teoria delle carte geografiche, e da questo studio ha origine una delle sue prime pubblicazioni notevoli:

- Risoluzione del problema «Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette» (1865)

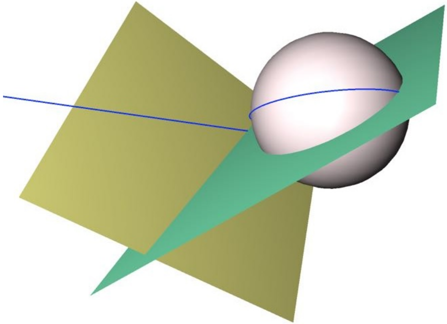
La risposta di Beltrami:

Questo è possibile se e solo se la superficie in questione ha **curvatura costante**.

Su una superficie nello spazio ordinario le **geodetiche** sono le curve le cui porzioni comprese tra punti abbastanza vicini hanno lunghezza minima tra tutte le curve (sulla superficie) congiungenti i punti stessi.

Esempio: proiezione gnomonica della sfera

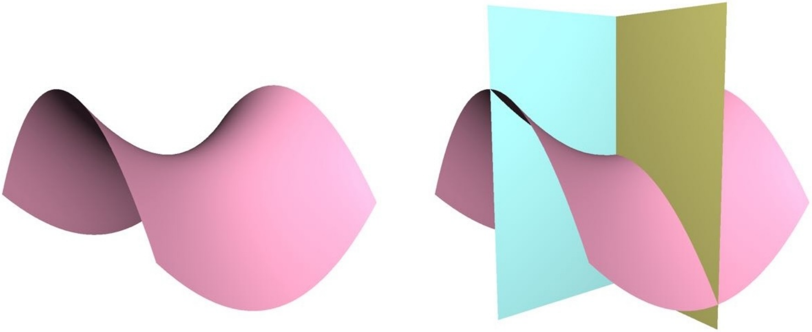
Su una sfera le geodetiche sono i cerchi massimi. La proiezione dal centro di una (semi)sfera su un piano muta i cerchi massimi in rette.



La sfera di raggio R ha curvatura $1/R^2 > 0$.

Curvatura

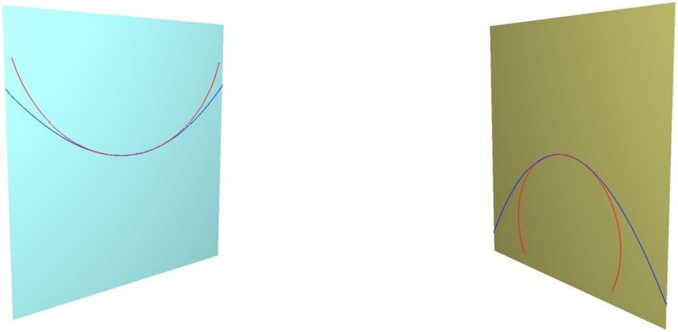
La curvatura di una superficie dello spazio ordinario in un suo punto p è $1/R_1R_2$ dove R_1, R_2 sono massimo e minimo dei raggi di curvatura (con segno) in p delle curve tagliate da piani ortogonali alla superficie in p. Il raggio di curvatura è quello del corrispondenti cerchi osculatori.



Una superficie di curvatura negativa e due piani secanti.

Curvatura

La curvatura di una superficie dello spazio ordinario in un suo punto p è $1/R_1R_2$ dove R_1, R_2 sono massimo e minimo dei raggi di curvatura (con segno) in p delle curve tagliate da piani ortogonali alla superficie in p. Il raggio di curvatura è quello del corrispondenti cerchi osculatori.



Le curve tagliate dai piani in blu, i cerchi osculatori in rosso.

Curvatura

Consideriamo una superficie parametrica nello spazio euclideo con coordinate x, y, z data da $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ e un cammino

$$\gamma(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$$

sulla superficie. Il vettore velocità al tempo t di questo cammino è

$$\dot{\gamma}(t) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\dot{u}(t) + \frac{\partial x}{\partial v}\dot{v}(t), \frac{\partial y}{\partial u}\dot{u}(t) + \frac{\partial y}{\partial v}\dot{v}(t), \frac{\partial z}{\partial u}\dot{u}(t) + \frac{\partial z}{\partial v}\dot{v}(t) \right)$$

Curvatura

Consideriamo una superficie parametrica nello spazio euclideo con coordinate x, y, z data da $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ e un cammino

$$\gamma(t) = (x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t)), z(u(t),v(t)))$$

sulla superficie. Il vettore velocità al tempo t di questo cammino è

$$\dot{\gamma}(t) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\dot{u}(t) + \frac{\partial x}{\partial v}\dot{v}(t), \frac{\partial y}{\partial u}\dot{u}(t) + \frac{\partial y}{\partial v}\dot{v}(t), \frac{\partial z}{\partial u}\dot{u}(t) + \frac{\partial z}{\partial v}\dot{v}(t)\right)$$

Il quadrato della sua lunghezza, nella notazione classica di Gauss, è

$$|\dot{\gamma}(t)|^2 = E(u(t),v(t))\dot{u}(t)^2 + 2F(u(t),v(t))\dot{u}(t)\dot{v}(t) + G(u(t),v(t))\dot{v}(t)^2$$

dove E, F, G sono funzioni di u e v. Il lato destro è una forma quadratica positiva definita in $(\dot{u}(t), \dot{v}(t))$ e viene di solito scritta

$$E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2$$

Curvatura

Consideriamo una superficie parametrica nello spazio euclideo con coordinate x, y, z data da $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ e un cammino

$$\gamma(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$$

sulla superficie. Il vettore velocità al tempo t di questo cammino è

$$\dot\gamma(t) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\dot u(t) + \frac{\partial x}{\partial v}\dot v(t), \frac{\partial y}{\partial u}\dot u(t) + \frac{\partial y}{\partial v}\dot v(t), \frac{\partial z}{\partial u}\dot u(t) + \frac{\partial z}{\partial v}\dot v(t)\right)$$

Il quadrato della sua lunghezza, nella notazione classica di Gauss, è

$$|\dot\gamma(t)|^2 = E(u(t), v(t))\dot u(t)^2 + 2F(u(t), v(t))\dot u(t)\dot v(t) + G(u(t), v(t))\dot v(t)^2$$

dove E, F, G sono funzioni di u e v. Il lato destro è una forma quadratica positiva definita in $(\dot u(t), \dot v(t))$ e viene di solito scritta

$$E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2$$

Il "Theorema Egregium" di Gauss dice che la curvatura della superficie considerata dipende (in modo che qui non esplicito) solo da E, F, G.

Curvatura

Più in generale, dato uno "spazio" o "varietà" parametrizzato da coordinate $u_1, \ldots, u_n$, una **metrica riemanniana** su questo spazio è una espressione

$$ds^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}(u_1, \ldots, u_n) du_i du_j$$

tale che per ogni fissato valore di $u_1, \ldots, u_n$ la matrice $\big(a_{i,j}(u_1, \ldots, u_n)\big)$ sia simmetrica e positiva definita. Una metrica riemanniana permette di calcolare le lunghezze dei vettori tangenti, cioè dei vettori "velocità istantanea", come

$$|(\dot{u}_1, \ldots, \dot{u}_n)| = \Big(\sum_{i,j} a_{i,j} \dot{u}_i \dot{u}_j\Big)^{1/2}$$

e, per integrazione di queste, le lunghezze dei cammini. In questo contesto la definizione di geodetica è identica a quella già data per una superficie in uno spazio euclideo. Si tratta dunque di un cammino con la proprietà di realizzare la minima distanza tra due qualsiasi suoi punti, purché abbastanza vicini.

Curvatura

Più in generale, dato uno "spazio" o "varietà" parametrizzato da coordinate $u_1, \ldots, u_n$, una **metrica riemanniana** su questo spazio è una espressione

$$ds^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}(u_1, \ldots, u_n) du_i du_j$$

tale che per ogni fissato valore di $u_1, \ldots, u_n$ la matrice $\big(a_{i,j}(u_1, \ldots, u_n)\big)$ sia simmetrica e positiva definita. Una metrica riemanniana permette di calcolare le lunghezze dei vettori tangenti, cioè dei vettori "velocità istantanea", come

$$|(\dot{u}_1, \ldots, \dot{u}_n)| = \Big(\sum_{i,j} a_{i,j} \dot{u}_i \dot{u}_j\Big)^{1/2}$$

e, per integrazione di queste, le lunghezze dei cammini. In questo contesto la definizione di geodetica è identica a quella già data per una superficie in uno spazio euclideo. Si tratta dunque di un cammino con la proprietà di realizzare la minima distanza tra due qualsiasi suoi punti, purché abbastanza vicini.
Ci sono varie generalizzazioni della nozione di curvatura a questo contesto. Quella cui fa sempre riferimento Beltrami, nei lavori che discuteremo, è la **curvatura sezionale**, un numero associato a ogni sottospazio bidimensionale dello spazio tangente alla varietà in un suo punto.

Bologna (1866-73)

Beltrami resta a Pisa meno di tre anni, tornando a Bologna nel 1866. Resta a Bologna, dove ricopre una cattedra di meccanica razionale, fino al 1873.

In questi anni vengono pubblicati alcuni dei suoi lavori più notevoli, tra i quali:

- Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima (1867)
- Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque (1867)
- Saggio di interpetrazione della Geometria non-euclidea (1868)
- Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante (1868)

Bologna (1866-73)

Beltrami resta a Pisa meno di tre anni, tornando a Bologna nel 1866. Resta a Bologna, dove ricopre una cattedra di meccanica razionale, fino al 1873.

In questi anni vengono pubblicati alcuni dei suoi lavori più notevoli, tra i quali:

- Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima (1867)
- Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque (1867)
- Saggio di interpetrazione della Geometria non-euclidea (1868)
- Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante (1868)

Nel secondo lavoro fanno la loro prima apparizione quelli che saranno poi chiamati ”equazione differenziale di Beltrami”, ”coefficiente di Beltrami” e ”differenziali di Beltrami”, nozioni che sono centrali in teoria di Teichmüller.

Il terzo e il quarto lavoro sono i principali contributi di Beltrami alla geometria iperbolica.

Beltrami e la geometria iperbolica

La geometria sferica è quella in cui le ”rette” sono i cerchi massimi su una sfera. Soddisfa tutti i postulati di Euclide tranne il terzo che asserisce l’esistenza di cerchi di raggio arbitrariamente grande; va però detto che i postulati sono abbastanza vaghi da ammettere diverse interpretazioni, una delle quali è soddisfatta anche in geometria sferica.

Beltrami e la geometria iperbolica

La geometria sferica è quella in cui le ”rette” sono i cerchi massimi su una sfera. Soddisfa tutti i postulati di Euclide tranne il terzo che asserisce l’esistenza di cerchi di raggio arbitrariamente grande; va però detto che i postulati sono abbastanza vaghi da ammettere diverse interpretazioni, una delle quali è soddisfatta anche in geometria sferica.

Già Gauss e Minding avevano notato che, su piccola scala, la geometria delle geodetiche su una superficie di curvatura costante negativa sembra realizzare la geometria iperbolica di Lobachevsky-Bolyai, nella quale non vale il quinto postulato (in una versione alternativa all’originale, questo afferma che per un punto esterno a una retta data esiste al più una parallela alla retta stessa).

Beltrami e la geometria iperbolica

La geometria sferica è quella in cui le ”rette” sono i cerchi massimi su una sfera. Soddisfa tutti i postulati di Euclide tranne il terzo che asserisce l’esistenza di cerchi di raggio arbitrariamente grande; va però detto che i postulati sono abbastanza vaghi da ammettere diverse interpretazioni, una delle quali è soddisfatta anche in geometria sferica.

Già Gauss e Minding avevano notato che, su piccola scala, la geometria delle geodetiche su una superficie di curvatura costante negativa sembra realizzare la geometria iperbolica di Lobachevsky-Bolyai, nella quale non vale il quinto postulato (in una versione alternativa all’originale, questo afferma che per un punto esterno a una retta data esiste al più una parallela alla retta stessa).

Il problema era la realizzazione **globale** di una tale geometria, dato che non si conoscevano superficie di curvatura costante negativa nello spazio ordinario che fossero complete (tutte le geodetiche sono estendibili indefinitamente). E questo per un’ottima ragione, cioè che non ne esistono (Hilbert, 1901).

Il primo modello di Beltrami

In ”Saggio di interpetrazione della Geometria non-euclidea” Beltrami costruisce un modello concreto di geometria iperbolica riprendendo idee già sviluppate nel suo lavoro sulle superficie che ammettono ”carte geografiche” in cui tutte le geodetiche sono rappresentate da rette.

Il modello è il disco nello spazio di due variabili reali u, v definito da

$$u^2 + v^2 < a^2$$

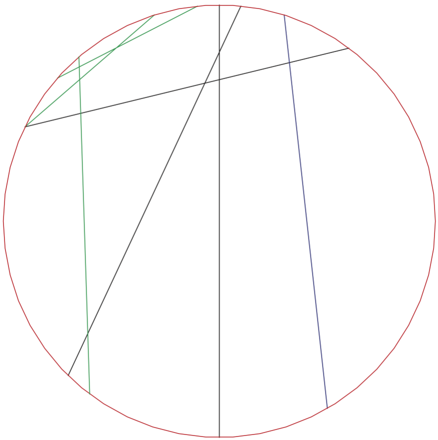
dove a è un numero reale positivo, munito della metrica riemanniana

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - v^2)du^2 + (a^2 - u^2)dv^2 + 2uvdudv}{(a^2 - u^2 - v^2)^2}$$

dove R è reale positivo.

La curvature di questa metrica è $-1/R^2$ e **le geodetiche sono le corde del disco**.

Il primo modello di Beltrami



È evidente che, data una qualsiasi corda, per un punto esterno ad essa passano infinite corde che non l'intersecano e due ad essa "parallele", cioè che l'intersecano in un punto del bordo.

Il primo modello di Beltrami

Il modello **non è conforme** nel senso che gli angoli nella metrica di Beltrami non sono gli angoli euclidei (sono più piccoli).

Il primo modello di Beltrami

Il modello **non è conforme** nel senso che gli angoli nella metrica di Beltrami non sono gli angoli euclidei (sono più piccoli).

Beltrami mostra che la lunghezza delle geodetiche, nella metrica assegnata, è infinita, o in altre parole che archi di geodetiche possono essere indefinitamente estesi.

Il primo modello di Beltrami

Il modello **non è conforme** nel senso che gli angoli nella metrica di Beltrami non sono gli angoli euclidei (sono più piccoli).

Beltrami mostra che la lunghezza delle geodetiche, nella metrica assegnata, è infinita, o in altre parole che archi di geodetiche possono essere indefinitamente estesi.

Il modello di Beltrami è spesso impropriamente detto **”di Klein”**, anche se Klein lo pubblicò, indipendentemente da Beltrami, solo nel 1871 (Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie).

Il primo modello di Beltrami

Il modello **non è conforme** nel senso che gli angoli nella metrica di Beltrami non sono gli angoli euclidei (sono più piccoli).

Beltrami mostra che la lunghezza delle geodetiche, nella metrica assegnata, è infinita, o in altre parole che archi di geodetiche possono essere indefinitamente estesi.

Il modello di Beltrami è spesso impropriamente detto **”di Klein”**, anche se Klein lo pubblicò, indipendentemente da Beltrami, solo nel 1871 (Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie).

Il ”Saggio di interpretazione. . . ” ebbe grande eco a livello internazionale, tanto che, insieme al successivo ”Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante”, apparve già nel 1869, in traduzione, negli Annales de l’École Normale Supérieure.

Il primo modello di Beltrami

Il modello **non è conforme** nel senso che gli angoli nella metrica di Beltrami non sono gli angoli euclidei (sono più piccoli).

Beltrami mostra che la lunghezza delle geodetiche, nella metrica assegnata, è infinita, o in altre parole che archi di geodetiche possono essere indefinitamente estesi.

Il modello di Beltrami è spesso impropriamente detto **"di Klein"**, anche se Klein lo pubblicò, indipendentemente da Beltrami, solo nel 1871 (Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie).

Il "Saggio di interpretazione. . . " ebbe grande eco a livello internazionale, tanto che, insieme al successivo "Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante", apparve già nel 1869, in traduzione, negli Annales de l'École Normale Supérieure.

Ho l'impressione che Klein non abbia "ben letto" il lavoro di Beltrami, almeno a giudicare da quanto ne dice nelle sue dispense "Nicht-Euklidische Geometrie I" del 1892, che sono al riguardo assai approssimative.

da: F. Klein, Nichteuklidische Geometrie I note di Fr. Schilling, Göttingen 1892

Denn:

„das Verdienst des Beltramischen Saggio ist es, nachdrücklich darauf aufmerksam gemacht zu haben, daß die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung sich geradezu mit der nichteuklidischen, d. h. hyperbolischen Geometrie deckt."

Wir müssen jedoch noch hinzufügen: „Abgesehen natürlich von den besonderen Zusammenhangs- und Begrenzungsverhältnissen, die bei solchen Flächen durch ihren Charakter als Rotationsflächen oder durch das Auftreten von Rückkehrkurven herbeigeführt sein können."

da: F. Klein, Nichteuklidische Geometrie I note di Fr. Schilling, Göttingen 1892

”Il merito del Saggio di Beltrami è quello di aver richiamato con chiarezza l’attenzione sul fatto che la geometria su superficie a curvatura negativa costante coincide in realtà con la geometria non euclidea, cioè iperbolica”. Dobbiamo però aggiungere: ”A parte, naturalmente, le speciali condizioni di connessione e al contorno che possono essere determinate in tali superficie dal loro carattere di superficie di rivoluzione o dalla presenza di curve di ritorno.”

da: F. Klein, Nichteuklidische Geometrie I note di Fr. Schilling, Göttingen 1892

”Il merito del Saggio di Beltrami è quello di aver richiamato con chiarezza l’attenzione sul fatto che la geometria su superficie a curvatura negativa costante coincide in realtà con la geometria non euclidea, cioè iperbolica”. Dobbiamo però aggiungere: ”A parte, naturalmente, le speciali condizioni di connessione e al contorno che possono essere determinate in tali superficie dal loro carattere di superficie di rivoluzione o dalla presenza di curve di ritorno.”

La prima parte del commento è diminutiva rispetto alla portata di quanto fatto da Beltrami. Le riserve espresse nella seconda parte del commento non hanno niente a che vedere con quanto effettivamente contenuto nel Saggio.

La ”Teoria fondamentale. . . ”

In ”Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante” Beltrami costruisce diversi modelli di geometria iperbolica in dimensione arbitraria. Come esplicitamente dichiarato da Beltrami nell’introduzione, questo lavoro è influenzato dalla lettura della lezione inaugurale di Riemann ”Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen”, letta nel 1854 ma pubblicata solo nel 1868 a cura di Dedekind.

Il modello base è l’emisfero n-dimensionale

$$y^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = a^2 \,, \quad y > 0$$

dove a è un numero reale positivo, nello spazio di $n+1$ variabili reali $y, x_1, \dots, x_n$, munito della metrica riemanniana

$$ds^2 = R^2 \frac{dy^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{y^2}$$

con R reale positivo.

Il modello emisferico

Il modello è **conforme**: gli angoli coincidono con quelli euclidei, dato che la metrica, a meno di un fattore di proporzionalità variabile, è quella euclidea. La curvatura è $-1/R^2$.

Il modello emisferico

Il modello è **conforme**: gli angoli coincidono con quelli euclidei, dato che la metrica, a meno di un fattore di proporzionalità variabile, è quella euclidea. La curvatura è $-1/R^2$.

Beltrami mostra che le geodetiche sono le linee tagliate sull'emisfero da $n-1$ iperpiani indipendenti perpendicolari all'iperpiano $y=0$, e che esse hanno lunghezza infinita. Lo fa studiando le equazioni di Eulero-Lagrange del funzionale lunghezza minimizzato dalle geodetiche. Più avanti darò una giustificazione (quasi) senza calcoli.

Il modello emisferico

Il modello è **conforme**: gli angoli coincidono con quelli euclidei, dato che la metrica, a meno di un fattore di proporzionalità variabile, è quella euclidea. La curvatura è $-1/R^2$.

Beltrami mostra che le geodetiche sono le linee tagliate sull'emisfero da $n-1$ iperpiani indipendenti perpendicolari all'iperpiano $y=0$, e che esse hanno lunghezza infinita. Lo fa studiando le equazioni di Eulero-Lagrange del funzionale lunghezza minimizzato dalle geodetiche. Più avanti darò una giustificazione (quasi) senza calcoli.

Una conseguenza immediata è che per proiezione ortogonale sull'iperpiano $y=0$ si riottiene il modello costruito nel "Saggio di interpetrazione…", generalizzato a n dimensioni.

Il modello emisferico

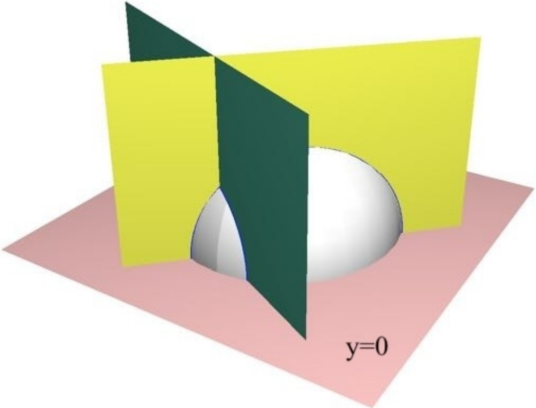
Il modello è **conforme**: gli angoli coincidono con quelli euclidei, dato che la metrica, a meno di un fattore di proporzionalità variabile, è quella euclidea. La curvatura è $-1/R^2$.

Beltrami mostra che le geodetiche sono le linee tagliate sull'emisfero da $n-1$ iperpiani indipendenti perpendicolari all'iperpiano $y=0$, e che esse hanno lunghezza infinita. Lo fa studiando le equazioni di Eulero-Lagrange del funzionale lunghezza minimizzato dalle geodetiche. Più avanti darò una giustificazione (quasi) senza calcoli.

Una conseguenza immediata è che per proiezione ortogonale sull'iperpiano $y=0$ si riottiene il modello costruito nel "Saggio di interpetrazione. . . ", generalizzato a n dimensioni.

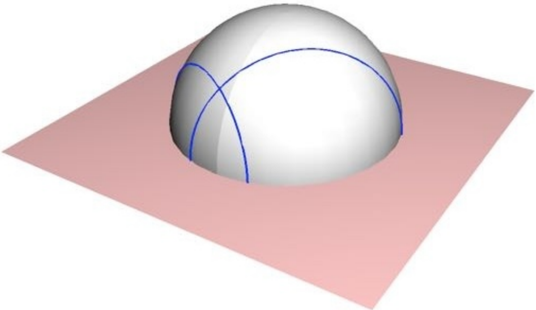
D'ora in poi, per semplicità, mi limiterò al caso $a=R=1$, e generalmente a $n=2$.

Il modello emisferico



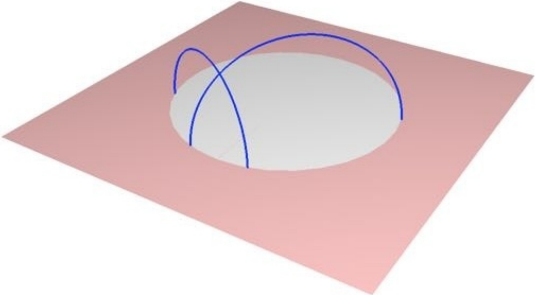
L'emisfero e due piani ortogonali a $y = 0 \dots$

Il modello emisferico



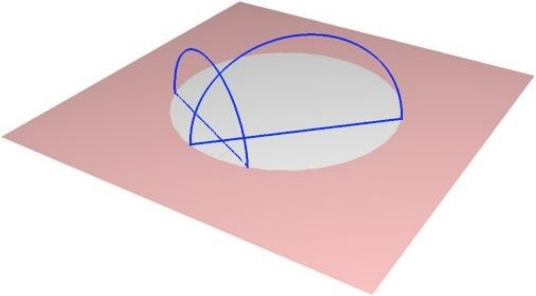
. . . che tagliano sull’emisfero due geodetiche (due semicerchi). . .

Il modello emisferico



…che tagliano sull'emisfero due geodetiche (due semicerchi)…

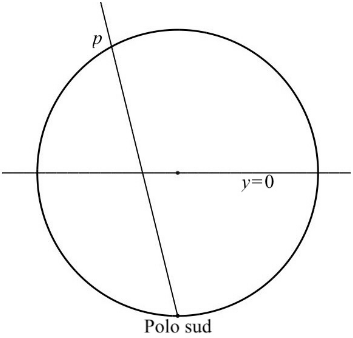
Il modello emisferico



. . . che si proiettano su due corde del disco unitario in $y = 0$.

Il modello stereografico

Un altro modello introdotto da Beltrami, sempre in ”Teoria fondamentale. . . ” viene da lui chiamato ”stereografico”. Lo costruisce per via analitica, con un opportuno cambio di coordinate, ma può in effetti essere dedotto dal modello emisferico per proiezione stereografica dal ”polo sud” della sfera (il punto per cui $y = -1$) sul ”piano equatoriale” $y = 0$. Questa proiezione associa a un punto p dell'emisfero il punto di intersezione di $y = 0$ con la retta congiungente p con il polo sud. I punti risultanti sono tutti e soli i punti del disco unitario (o più in generale della palla unitaria) in $y = 0$.



Il modello stereografico

Un altro modello introdotto da Beltrami, sempre in "Teoria fondamentale…" viene da lui chiamato "stereografico". Lo costruisce per via analitica, con un opportuno cambio di coordinate, ma può in effetti essere dedotto dal modello emisferico per proiezione stereografica dal "polo sud" della sfera (il punto per cui $y = -1$) sul "piano equatoriale" $y = 0$. Questa proiezione associa a un punto p dell'emisfero il punto di intersezione di $y = 0$ con la retta congiungente p con il polo sud. I punti risultanti sono tutti e soli i punti del disco unitario (o più in generale della palla unitaria) in $y = 0$.

La metrica che si ottiene sulla palla trasferendovi quella dell'emisfero è

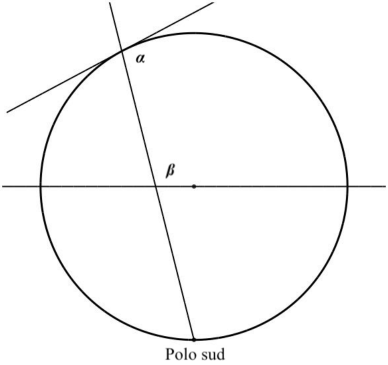
$$ds^2 = 4\frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{(1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)^2}$$

Il modello non è altro che quello che, in dimensione 2, viene comunemente chiamato **"disco di Poincaré"**, o modello "di Poincaré" della geometria iperbolica piana.

Il modello stereografico

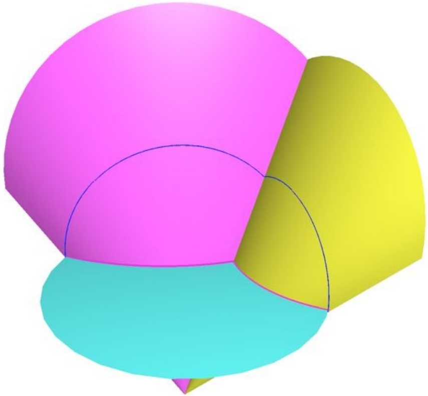
Il modello stereografico è conforme, come si vede dalla forma della metrica. La proiezione stereografica è conforme e trasforma cerchi sulla sfera in cerchi (o rette) del piano. Questo è un **esercizio** di geometria euclidea.

Suggerimento: gli angoli α e β sono uguali



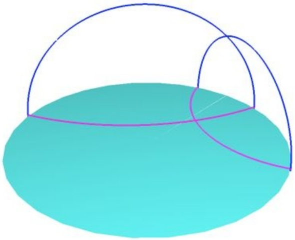
Il modello stereografico

Le geodetiche del modello emisferico, che sono semicerchi ortogonali al bordo dell'emisfero, vengono proiettate su archi di cerchio ortogonali al bordo della palla

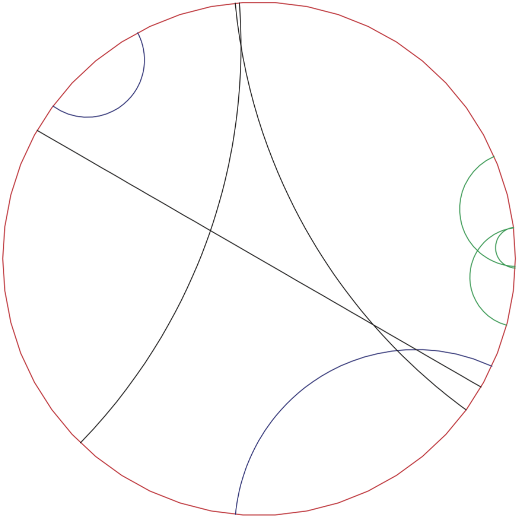


Il modello stereografico

Le geodetiche del modello emisferico, che sono semicerchi ortogonali al bordo dell'emisfero, vengono proiettate su archi di cerchio ortogonali al bordo della palla



Il modello stereografico



Il semispazio superiore

Beltrami osserva che l'applicazione

$$(y, x_1, \dots, x_n) \longmapsto (\eta, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \left(\frac{y}{1 - x_n}, \frac{x_1}{1 - x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1 - x_n} \right)$$

manda l'emisfero del modello base biunivocamente sul semispazio $\eta > 0$ nello spazio di n coordinate reali $\eta, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$. Nota anche che questa applicazione muta la metrica dull'emisfero nella metrica

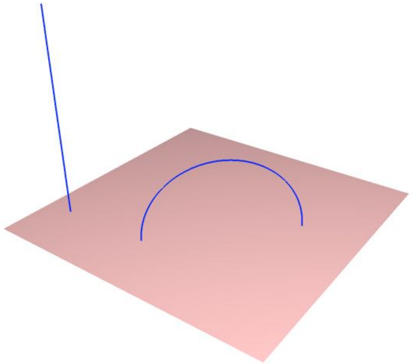
$$ds^2 = \frac{d\eta^2 + d\xi_1^2 + \cdots + d\xi_{n-1}^2}{\eta^2}$$

Questo fornisce un ulteriore modello, equivalente ai precedenti, di geometria iperbolica n-dimensionale. Lo chiameremo **semispazio superiore** di dimensione n.

Usando considerazioni di simmetria è facile trovare le geodetiche nel semispazio superiore. Mi limiterò ai casi di dimensione 2 e 3. Il caso generale si tratta allo stesso modo.

Il semispazio superiore

Vedremo che nel semispazio $y > 0$ nello spazio di tre coordinate reali y, x_1, x_2 le geodetiche sono le semirette ortogonali al piano $y = 0$ e i semicerchi ortogonali a questo stesso piano.



Il semispazio superiore

Sia Π un piano ortogonale a $y = 0$. Sia γ una geodetica passante per un punto $p \in \Pi$ con vettore velocità v tangente a (e quindi contenuto in) Π. È immediato verificare che la riflessione rispetto a Π rispetta la metrica. Applicando questa riflessione a γ si ottiene un'altra geodetica passante per p con velocità v. Se γ non fosse contenuta in Π le due geodetiche sarebbero diverse, il che è impossibile perché le geodetiche soddisfano una "buona" equazione differenziale del secondo ordine. Dunque ogni geodetica è contenuta in un piano ortogonale a $y = 0$, il che ci riduce al caso bidimensionale del semipiano superiore $y > 0$ nel piano con coordinate y, x.

Ragionando per simmetria come sopra si mostra che le semirette ortogonali a $y = 0$ sono geodetiche. Mostriamo che un semicerchio di raggio r con centro su $y = 0$ è una geodetica. Non è restrittivo supporre che il centro sia l'origine. Si verifica facilmente che la mappa

$$(x, y) \longmapsto r^2(x, y)/(x^2 + y^2)$$

rispetta la metrica, lascia fissi i punti del semicerchio e scambia l'interno di questo con l'esterno. Ragionando per simmetria si conclude che il semicerchio è una geodetica.

Il semispazio superiore

Tornando al modello emisferico, una conseguenza di quanto mostrato è che i semicerchi tagliati sull'emisfero da piani perpendicolari a y=0 sono geodetiche nel semispazio superiore, e quindi anche sull'emisfero, come dimostrato per altra via da Beltrami. In altre parole, l'emisfero è una sottovarietà totalmente geodetica del semispazio superiore.

In conclusione:

nei due lavori del 1868 "Saggio di interpetrazione…" e "Teoria fodamentale…" Beltrami introduce tutti i modelli classici di geometria iperbolica, cioè quello "di Klein" e quello "di Poincaré", sia nella versione "disco" che in quella "semipiano", e lo fa in dimensione arbitraria.

Nei due lavori Beltrami esamina poi a fondo la geometria dei modelli, mostrandone omogeneità e isotropia tramite lo studio delle loro isometrie, e verificandone l'aderenza alla geometria di Lobachevsky, interpretando nozioni di geometria iperbolica come orocicli, orosfere….

Orosfere

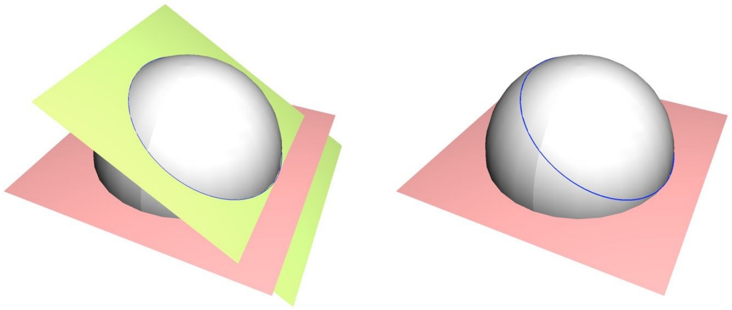
Beltrami alterna i vari modelli secondo i bisogni. Un esempio è la sua dimostrazione che le orosfere – ipersuperfici ovunque ortogonali a tutte le geodetiche uscenti da uno stesso punto del bordo – hanno curvatura nulla e quindi sono spazi euclidei. Tratta per primo il caso di un punto particolare del bordo del semispazio superiore, il punto "all'infinito" verso cui convergono tutte le geodetiche che sono semirette ortogonali al piano $\eta = 0$. Le orosfere sono gli iperpiani $\eta = k$ dove k è una costante positiva. Poiché la metrica sul semispazio è quella euclidea moltiplicata per il fattore $1/\eta^2$, essa induce sull'iperpiano $\eta = k$ una metrica che è quella quella euclidea, a meno della costante moltiplicativa $1/k^2$.

Per "leggere" queste orosfere nel modello emisferico è sufficiente ricordare che

$$\eta = \frac{y}{1 - x_n}$$

Orosfere

Quindi nel modello emisferico l'orosfera considerata è tagliata dall'iperpiano di equazione $y + k(x_n - 1) = 0$. È una sfera $n - 1$ dimensionale tangente al bordo dell'emisfero nel punto di coordinate $(0, 0, \ldots, 0, 1)$.



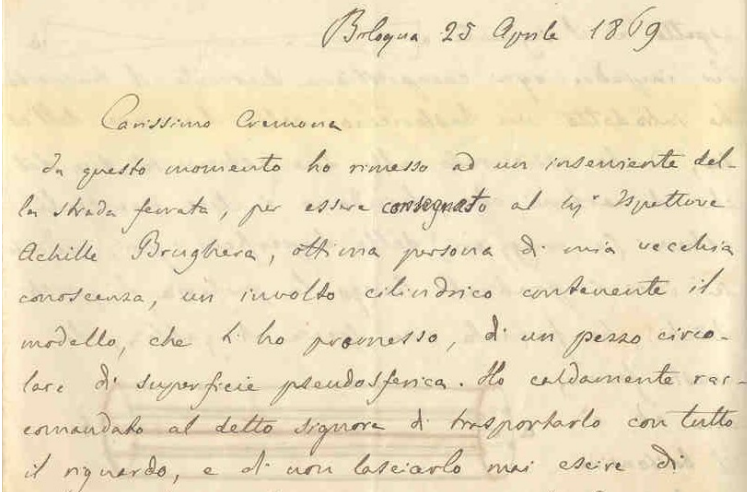
Per simmetria intorno all'asse delle y le orosfere nel modello emisferico (e per proiezione stereografica nel modello stereografico) sono tutte e sole le sfere interne al modello e tangenti al suo bordo. Hanno tutte curvatura nulla.

Orosfere

Uno dei motivi dell'interesse di Beltrami per le orosfere è il suo desiderio di mostrare che, così come i suoi modelli mostrano che la geometria iperbolica può essere costruita all'interno di quella euclidea, così la geometria euclidea e quella sferica di dimensione n sono "contenute" all'interno di quella iperbolica di dimensione $n+1$, la prima come orosfera e la seconda come sfera (luogo di punti equidistanti da un punto dato).

La cuffia di Beltrami

Il 25 aprile 1869 Beltrami invia una lettera a Cremona, che nel 1867 si era trasferito da Bologna all'Istituto Tecnico Superiore (poi Politecnico) di Milano:



Bologna 25 Aprile 1869

Carissimo Cremona

In questo momento ho rimesso ad un inserviente della strada ferrata, per essere consegnato al Sig.r Ispettore Achille Brughera, ottima persona di mia vecchia conoscenza, un involto cilindrico contenente il modello, che ti ho promesso, di un pezzo circolare di superficie pseudosferica. Ho caldamente raccomandato al detto signore di trasportarlo con tutto il riguardo, e di non lasciarlo mai escire di

La cuffia di Beltrami

Il 25 aprile 1869 Beltrami invia una lettera a Cremona, che nel 1866 si era trasferito da Bologna all'Istituto Tecnico Superiore (poi Politecnico) di Milano:

Carissimo Cremona,

in questo momento ho rimesso ad un inserviente della strada ferrata, per essere consegnato al sig. Ispettore Achille Brughera, ottima persona di mia vecchia conoscenza, un involto cilindrico contenente il modello, che ti ho promesso, di un pezzo circolare di superficie pseudosferica. Ho caldamente raccomandato al detto signore di trasportarlo con tutto il riguardo, e di non lasciarlo mai escire. . .

La cuffia di Beltrami

Il 25 aprile 1869 Beltrami invia una lettera a Cremona, che nel 1866 si era trasferito da Bologna all'Istituto Tecnico Superiore (poi Politecnico) di Milano:

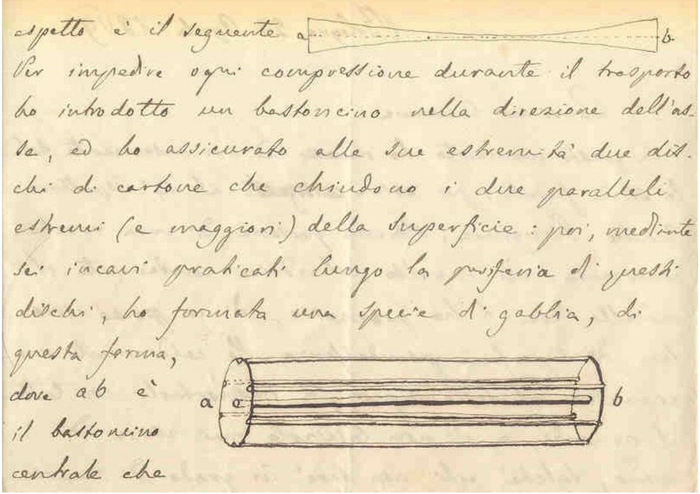
Carissimo Cremona,

in questo momento ho rimesso ad un inserviente della strada ferrata, per essere consegnato al sig. Ispettore Achille Brughera, ottima persona di mia vecchia conoscenza, un involto cilindrico contenente il modello, che ti ho promesso, di un pezzo circolare di superficie pseudosferica. Ho caldamente raccomandato al detto signore di trasportarlo con tutto il riguardo, e di non lasciarlo mai escire...

Il modello è la cosiddetta "cuffia di Beltrami". Pare che questo nome sia apparso per la prima volta in un pezzo satirico di un giornale studentesco dedicato a una presentazione pubblica del modello da parte di Casorati.

La cuffia di Beltrami

La lettera contiene una dettagliata descrizione sia dell'imballaggio che del modello

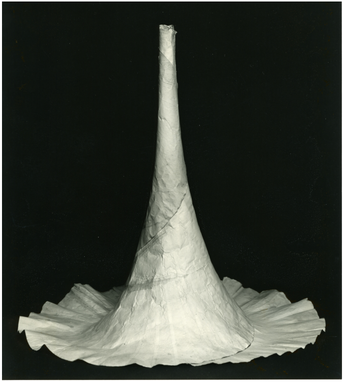


aspetto è il seguente a b.
Per impedire ogni compressione durante il trasporto
ho introdotto un bastoncino nella direzione dell'as-
se, ed ho assicurato alle sue estremità due dis-
chi di cartone che chiudono i due paralleli
estremi (e maggiori) della superficie: poi, mediante
sei incavi praticati lungo la periferia di questi
dischi, ho formata una specie di gabbia, di
questa forma,
dove ab è
il bastoncino
centrale che
a b

La cuffia di Beltrami

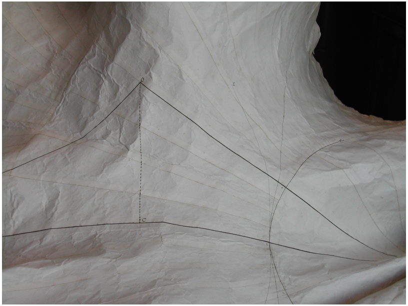
La cuffia è un modello in carta di un disco in una superficie di curvatura costante negativa, costruito personalmente da Beltrami incollando tra loro lunghe strisce di carta. I fondamenti teorici sottostanti alla costruzione del modello sono esposti nel lavoro del 1872:

"Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche"



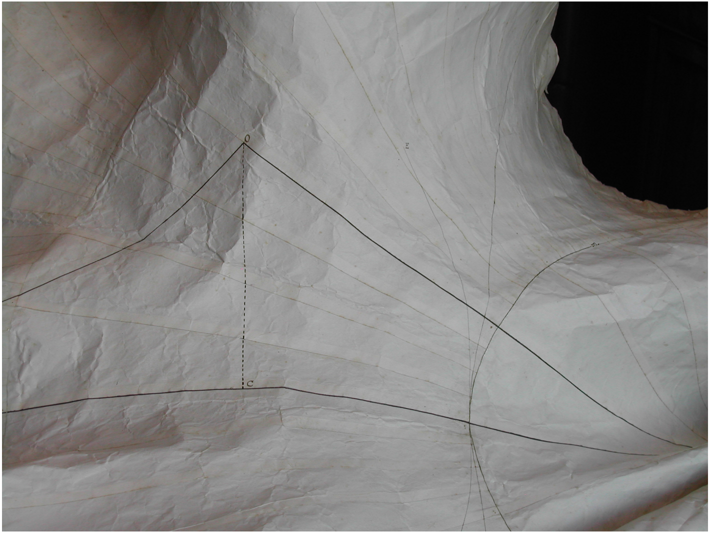
La cuffia di Beltrami

Sulla cuffia sono disegnate linee geometricamente significative, come geodetiche e orocicli



La cuffia di Beltrami

La cuffia di Beltrami



La fisica matematica di Beltrami

A partire dal 1870 circa, quasi tutta la produzione scientifica di Beltrami è dedicata a questioni di fisica matematica. Tra il 1871 e il 1874 pubblica, in cinque tomi, le monumentali e citatissime ”Ricerche sulla cinematica dei fluidi”. Il lavoro contiene una ricca messe di formule e risultati che Beltrami userà ripetutamente nei suoi successivi lavori. Oltre che di fluidodinamica si interessa di teoria del potenziale, di teoria dell’elasticità, di teoria del calore e soprattutto di elettrodinamica nell’indirizzo di Maxwell. In "Sulle equazioni generali dell’elasticità” (1880-82) si dimostra che le equazioni dell’isotropia dipendono dal postulato euclideo e viene fondata la teoria dell’isotropia elastica in spazi di curvatura costante. In ”Considerazioni sulla teoria matematica dell’elettromagnetismo” (1892) Beltrami svolge la teoria fondamentale dell’elettromagnetismo secondo Maxwell mirando a dedurla da un numero il più limitato possibile di principi base e risolve le apparenti contraddizioni dovute all’introduzione da parte di Maxwell di due diversi tipi di forze. Delle equazioni di Maxwell dà una interpretazione meccanica (”Sull’interpretazione meccaniche delle formole di Maxwell”, 1986) e le deduce da un principio di D’Alembert generalizzato (Sull’estensione del principio di D’Alembert all’elettrodinamica, 1889).

Lo stile matematico di Beltrami

Beltrami è un matematico colto, che dimostra una eccezionale conoscenza di buona parte della letteratura matematica all'epoca disponibile, soprattutto in campo analitico, geometrico e fisico-matematico. Molti dei suoi lavori contengono sezioni, in particolare le introduzioni, di inquadramento storico o storico-filosofico dei problemi che intende affrontare. Un esempio per tutti è il lavoro del 1867 "Sulle proprietà generali delle superficie di area minima" nel quale l'introduzione (15 pagine su 59 totali) è un vero saggio di storia delle superfici minime. Un interesse di Beltrami per la storia della matematica è dimostrato anche dalla sua riscoperta e valorizzazione dell'opera geometrica di Gerolamo Saccheri ("Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky", 1889).

Beltrami ha scritto oltre 100 lavori (108 raccolti nelle sue Opere Matematiche). Parecchi sono molto lunghi, tanto che quelli pubblicati nelle Opere occupano complessivamente quasi 2000 pagine. A partire dal primo lavoro del 1861 ("Intorno ad alcuni sistemi di curve piane") ha mantenuto per tutta la sua carriera un ritmo di pubblicazione quasi costante, tranne che nell'ultimo decennio della sua vita quando le pubblicazioni divengono più rade e brevi.

Lo stile matematico di Beltrami

L’argomentare di Beltrami è sorprendentemente poco geometrico, il che è tanto più notevole per un autore che ha dato contributi sostanziali alla geometria. In particolare, i suoi lavori non contengono in genere figure. Anche in quelli di geometria iperbolica ci sono solo un paio di disegni nel ”Saggio”. Il modo di procedere di Beltrami è invece quello tipico di un analista classico, padrone del calcolo, della teoria delle funzioni di variabile reale e complessa e del calcolo delle variazioni.

Lo stile espositivo di Beltrami è stato spesso descritto come chiaro ed elegante, ed è difficile non convenire su ciò. Questo non significa però che i lavori di Beltrami siano di agevole lettura. Spesso essi si presentano come lunghe successioni di calcoli, non interrotte da enunciati di teoremi che sintetizzino quanto ottenuto o indichino quale sia lo scopo del suo procedere. Ciò ne rende la lettura particolarmente faticosa.

Roma (1873-76)

Dopo la presa di Roma e il trasferimento a Roma della capitale, l'allora ministro della Pubblica Istruzione Antonio Scialoja convince Cremona a accettare di dirigere la Scuola d'applicazione per gli Ingegneri di Roma, presso la quale lo stesso Cremona si trasferisce nel 1873. Su indicazione di Cremona viene offerta una cattedra di Meccanica Razionale a Beltrami, che accetta e si trasferisce a Roma nello stesso 1873.

Gli anni di avvio della Scuola per gli Ingegneri si rivelano più impegnativi del previsto, tanto che Cremona vorrebbe trasferirsi a Pisa, senza però riuscirci, in parte per le pressioni politiche esercitate su di lui. Invece Beltrami si trasferisce all'Università di Pavia, dove giunge nel 1876 e dove si tratterrà per quindici anni, fino al 1891.

Pavia (1876-91)

Gli antefatti. L'istituzione nel 1863 dell'Istituto Tecnico Superiore (poi Politecnico) di Milano aveva sottratto allievi, personale e attrezzature (anche libri) alla Facoltà di Scienze di Pavia, e in particolare al suo settore matematico che era anche, o soprattutto, una scuola di ingegneria. Va ricordato che Brioschi, Cremona e Casorati erano laureati in ingegneria.

La Scuola Normale di Pavia

Con il trasferimento di Brioschi a Milano e la messa a riposo di Gaspare Mainardi, nel 1863-64 i soli ordinari di matematica o materie affini a Pavia sono Casorati, Francesco Cattaneo, professore di Meccanica Razionale e Luigi Contratti, professore di Geodesia. La situazione non migliorerà negli anni successivi e Casorati si lamenterà ripetutamente, nella sua corrispondenza, dell'isolamento in cui si trovava.

Per risollevare le sorti della Facoltà di Scienze pavese si fa strada l'idea di istituire una Scuola Normale ispirata al modello pisano. Il progetto si concretizza con la creazione di un Consorzio tra comune di Pavia, provincia di Pavia, collegio Ghislieri e ospedale San Matteo, il cui statuto, approvato con decreto reale del giugno 1875, afferma che il Consorzio stesso è istituito:

...specialmente prima di tutto per ottenere che la facoltà di scienze fisiche, naturali e matematiche sia compiuta, così da dare tutte le lauree che per legge può conferire, ed essere **ordinata a scuola normale** *per abilitare all'insegnamento delle scienze nei licei, non che per assicurare anche in avvenire la continuazione delle cliniche speciali...*

La Scuola Normale di Pavia

La chiamata di Beltrami su una cattedra di Fisica Matematica è cruciale per l'avvio della Scuola. Infatti una delle condizioni necessarie per la sua istituzione è la presenza di insegnamenti all'epoca scoperti, tra i quali appunto la Fisica Matematica. Un ulteriore passo sarà compiuto nel 1880 con la chiamata di Eugenio Bertini, proveniente da Pisa, sulla cattedra di Geometria Superiore.

La Scuola è però minata alla base da un dissidio sulla natura delle scuole per la formazione degli insegnanti. La Scuola di Pavia è stata istituita qualche mese prima della emanazione del regolamento delle scuole di Magistero da parte del ministro Ruggiero Bonghi. A livello formale si discute se questo regolamento sia applicabile alla Scuola o se essa vada regolata dalle norme in vigore all'atto della sua istituzione. Su un piano sostanziale si scontrano due concezioni della formazione degli insegnanti. Una, cui si ispira il decreto Bonghi, ritiene che la preparazione disciplinare vada fornita dai corsi universitari regolari e che la scuola normale debba occuparsi solo della preparzione pedagogica. L'altra ritiene invece che la preparazione disciplinare fornita dai corsi universitari vada integrata fin dall'inizio con una preparazione supplementare fornita dai corsi e esercitazioni normalistici.

La Scuola Normale di Pavia

I matematici pavesi difendono compattamente questa seconda posizione, ponendo l'accento sulla necessità dell'approfondimento individuale. Così scrive Beltrami al Rettore di Pavia alla fine degli anni '70:

Se dunque la Scuola normale non rimedia a questo fondamentale difetto, attirando a sé i giovani fino dal primo anno di studio ed accompagnandoli per tutta la durata del corso, colla mira costante, non già di aumentare la somma delle loro cognizioni [. . .] ma di ottenere davvero la lenta ed efficace assimilazione di queste cognizioni, per mezzo di continue esercitazioni pratiche [. . .] non si otterrà dalla Scuola normale mai nulla di più di quello che si ottiene dalle attuali cosiddette Scuole di magistero, che è quanto dire pochissimo. La Scuola normale di Pisa avrà forse il difetto di non occuparsi, o di occuparsi troppo poco, della questione pedagogica: ma è pure un fatto che i suoi allievi vi acquistano sul serio l'attitudine e l'abitudine del lavoro individuale, e vi imparano a rendersi veramente conto di ciò che studiano all'Università. Ne risulta che basta loro un retto criterio per diventare poi buoni insegnanti, mentre quelli di maggior ingegno giungono assai presto a farsi onore con lavori di ricerca.

La Scuola Normale di Pavia

La Scuola era articolata in due bienni: nel biennio preparatorio gli allievi dovevano seguire i corsi ordinari tenuti in Facoltà, i corsi attivati dalla Scuola e seguire le esercitazioni pratiche sotto la guida del professore interno.

Nel successivo biennio normalistico, essi dovevano anche tenere conferenze su argomenti indicati da professori della Facoltà. Al termine di questo biennio, ottenuta la laurea, gli allievi dovevano presentare una dissertazione scritta *"la quale contenga alcun che di nuovo o dal lato dei risultati ottenuti, o dal lato del metodo seguito nello svolgimento della questione"*.

I professori interni avevano il compito di guidare e seguire tutte le esercitazioni degli studenti del biennio normalistico. In particolare, la figura del professore interno per le matematiche era espressamente prevista dal regolamento e nella sua scelta occorreva privilegiare l'attitudine alla ricerca, più che la semplice abilità didattica.

La Scuola Normale di Pavia

Nel 1890 muore prematuramente Casorati.

Nel 1891, amareggiato dalla scomparsa dell'amico e probabilmente anche disilluso sul futuro della Scuola normale di Pavia, Beltrami ritorna a Roma.

Nello stesso 1891 un decreto ministeriale impone all'Università di Pavia di uniformare il regolamento della Scuola a quello delle scuole di Magistero.

Nel 1892 anche Bertini lascia Pavia per tornare a Pisa.

Nonostante tutto la Scuola continua a funzionare ancora per alcuni anni secondo il modello pensato da Beltrami, dal 1902 come Scuola di magistero. Cessa di operare poco prima della prima guerra mondiale.

Negli oltre 30 anni della sua esistenza, la Scuola aveva visto passare per Pavia numerosi matematici di valore, come docenti, professori interni, allievi: Giacinto Morera, Giulio Vivanti, Carlo Somigliana, Salvatore Pincherle, Alfredo Capelli, Luigi Berzolari, Tito Camillo Cazzaniga e altri ancora.

Roma (1891-1900)

Beltrami rientra a Roma nel 1891. Nel 1898 succede a Brioschi nella presidenza dell'Accademia dei Lincei. Nel 1899 viene nominato senatore. Si spegne il 18 febbraio 1900.

Uno ”studioso puro”

Contrariamente ad altri matematici italiani dello stesso periodo, come Brioschi, Cremona o Betti, Beltrami non partecipò alle lotte risorgimentali e non svolse mai attività politica. Evitò anche di assumere incarichi direttivi. Persino nella Normale pavese, da lui in larga parte architettata, lasciò la presidenza a Bertini. Solo alla fine della vita, e per breve periodo, fu presidente dei Lincei e senatore del Regno.

Ringraziamenti

Le informazioni sulla Scuola normale di Pavia
sono state fornite da Riccardo Rosso, che ringrazio

Biblio

- Beltrami, Opere matematiche, Hoepli, Milano 1902–1920
- Milnor, Hyperbolic geometry: the first 150 years, Bulletin of the AMS, 6 (1982), 9–24
- Milnor, Morse Theory, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963