PROGRAMMA PROVVISORIO
DEL CORSO DI GEOMETRIA ALGEBRICA
Docenti Maurizio Cornalba e Cinzia Casagrande
Anno accademico 2008/2009
Laurea Specialistica, primo semestre
60 ore, 7 crediti

OBIETTIVI

Il corso vuole dare un'introduzione alla geometria algebrica tramite lo studio delle varietà quasi-proiettive su un campo k (essenzialmente nel caso in cui k è algebricamente chiuso). Per aiutare gli studenti a familiarizzarsi con l'argomento, verranno presentati numerosi esempi ed esercizi, in parte svolti in classe, in parte lasciati da svolgere agli studenti.

PREREQUISITI

I contenuti dei corsi di Geometria, Algebra, Algebra Lineare della laurea triennale.

MODALITÀ DI ESAME: esame orale.

CONTENUTI

- *Varietà affini.*

Anelli noetheriani, algebre su un campo. Chiusi algebrici affini, topologia di Zariski sullo spazio affine. Ideale di un chiuso algebrico, il Nullstellensatz di Hilbert, corrispondenza tra ideali radicali e chiusi algebrici. Irriducibilità e scomposizione in irriducibili, relazione con ideali primi, spazi topologici noetheriani. Anello delle funzioni regolari, morfismi e pull-back. Corrispondenza tra chiusi affini e k-algebre finitamente generate prive di nilpotenti. Prodotti di chiusi algebrici affini, ideale del prodotto.

- *Varietà proiettive e quasi proiettive.*

Topologia di Zariski nello spazio proiettivo, relazione con la topologia di Zariski sulle carte affini, Nullstellensatz proiettivo. Varietà quasi proiettive, irriducibilità e scomposizione in irriducibili. Funzioni e applicazioni regolari tra varietà quasi proiettive. Varietà affini e varietà proiettive. Funzioni e applicazioni razionali su varietà quasi proiettive. Applicazioni razionali dominanti, composizione di applicazioni razionali, pull-back. Equivalenza birazionale e il campo delle funzioni razionali.

Aperti principali di una varietà affine. Gli aperti affini formano una base della topologia di Zariski di una varietà quasi proiettiva. Prodotti di varietà quasi proiettive, applicazione di Segre, chiusi di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ e $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^m$.

L'immagine di una varietà proiettiva tramite un'applicazione regolare è un chiuso. Proprietà delle varietà proiettive, confronto con le varietà affini.

- *Dimensione.*

Estensioni di campi, dipendenza algebrica. Basi di trascendenza e grado di trascendenza di un'estensione di campi finitamente generata, dimensione di una varietà quasi proiettiva. Campo delle funzioni razionali di un'ipersuperficie affine irriducibile. Ogni varietà irriducibile è birazionale a un'ipersuperficie.

Dimensione di un prodotto. Dimensione di chiusi di una varietà. Dimensione dell'intersezione di un chiuso proiettivo con un'ipersuperficie (senza dimostrazione). Definizione topologica della dimensione. Dimensione delle fibre di un morfismo (dimostrazione parziale). Criterio di irriducibilità per il dominio di un morfismo.

- *Proprietà locali: spazio tangente e singolarità.*

Anello locale di una varietà quasi proiettiva in un punto, descrizione come localizzazione nel caso affine. Spazio tangente: definizione come sottospazio affine per un chiuso affine, isomorfismo con $(\frac{\mathfrak{m}_p}{\mathfrak{m}_p^2})^*$ indotto dal differenziale. Definizione generale come spazio vettoriale astratto $(\frac{\mathfrak{m}_p}{\mathfrak{m}_p^2})^*$. Differenziale di un morfismo. Semicontinuità superiore della dimensione dello spazio tangente, relazione con la dimensione nel caso irriducibile. Dimensione locale, punti singolari. L'anello locale in un punto non singolare è un dominio a fattorizzazione unica (senza dimostrazione). Un punto non singolare appartiene ad un'unica componente irriducibile. Il luogo non singolare è un aperto denso.

Ideale locale di un chiuso in un punto. Se l'anello locale è un dominio a fattorizzazione unica, l'ideale locale di un chiuso irriducibile di codimensione 1 è principale. Un'applicazione razionale da una varietà non singolare a una varietà proiettiva è definita in codimensione 1.

Spazio tangente proiettivo, singolarità di ipersuperfici proiettive.

- *Esempi, applicazioni, complementi.*

Proiezioni. Curve razionali normali. Quadriche proiettive. Applicazione di Veronese di grado 2, superficie di Veronese.

L'algebra esterna di uno spazio vettoriale, struttura di varietà proiettiva sulla grassmanniana $G(r, n)$ tramite l'immersione di Plücker. Aperti affini di $G(r, n)$, non singolarità, dimensione. Irriducibilità (dimostrazione nel caso $r = 1$). La grassmanniana $G(1, 3)$.

Ipersuperfici di grado d in $\mathbb{P}^n$, parametrizzazione tramite $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(k[x_0, \ldots, x_n]_d)$. Gli insiemi dei polinomi non ridotti e dei polinomi riducibili definiscono dei chiusi. Le ipersuperfici non singolari sono parametrizzate dal complementare di un'ipersuperficie irriducibile in $\mathbb{P}^N$. Caso delle coniche piane. Rette su superfici di $\mathbb{P}^3$, la generica superficie di grado $d > 3$ non contiene rette.

Ogni varietà proiettiva non singolare di dimensione n è isomorfa ad un chiuso di $\mathbb{P}^{2n+1}$, dimostrazione parziale tramite lo studio della varietà delle secanti.

Varietà quasi proiettive complesse, confronto tra la topologia euclidea e quella di Zariski, relazione irriducibilità/connessione e proiettività/compattezza. Varietà quasi proiettive complesse non singolari, strutture di varietà topologica, differenziabile reale, analitica complessa.

TESTI DI RIFERIMENTO

I. R. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry, Springer

M. Reid, Undergraduate Algebraic Geometry, Cambridge University Press 1988

R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer 1977 (capitolo 1)

J. Harris, Algebraic Geometry - A First Course, Springer 2000