Corso di Geometria 1 – a.a. 2015-2016

Prova scritta del 23 febbraio 2017

1. Si consideri lo spazio
$$X = \left\{ \left(\frac{1}{n}, (-1)^n \right) \in \mathbb{R}^2 \, : \, n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}$$
dotato della topologia indotta da quella usuale su $\mathbb{R}^2$. Si indichi con Y la chiusura di X.
   (a) Verificare che $(0,1) \in Y \setminus X$, ossia che appartiene a Y ma non a X.
   (b) Stabilire se Y è compatto.
   (c) Stabilire se Y è connesso.
   (d) Stabilire se Y è uno spazio di Hausdorff.
   (e) Verificare che ogni punto $p_n = \left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right)$ di X è un punto isolato di X, ossia per ogni n trovare $r_n > 0$ tale che $B(p_n, r_n) \cap X = \{p_n\}$.

2. Siano A e B i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ così definiti:
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$
$$B = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}$$
   (a) Mostrare che $\mathbb{R}^2/A$ e $\mathbb{R}^2/B$ sono di Hausdorff.
   (b) Mostrare che $\mathbb{R}^2/A$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$.
   (c) Mostrare che $\mathbb{R}^2/B$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

3. Sia X uno spazio topologico e sia Y un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^2$. Poniamo $F = C(X,Y)$, con la topologia della convergenza uniforme.
   (a) Mostrare con un esempio che Y può essere compatto senza che F lo sia.
   (b) Mostrare che se F è connesso anche Y è connesso.
   (c) Mostrare con un esempio che Y può essere connesso senza che F lo sia.

4. Si considerino in $\mathbb{P}^2$ sul campo reale la quadrica
$$\Gamma = \left\{ [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \,|\, 3x_0^2 + 2x_0x_1 - x_1^2 + x_1x_2 + 3x_0x_2 = 0 \right\}$$
e la retta
$$r = \left\{ [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \,|\, 3x_0 - x_1 + x_2 = 0 \right\}$$
e in $\mathbb{R}^2$, identificato con $\left\{ [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \,|\, x_0 \neq 0 \right\}$, la quadrica
$$\Gamma_0 = \left\{ [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \,|\, 3x_0^2 + 2x_0x_1 - x_1^2 + x_1x_2 + 3x_0x_2 = 0, \; x_0 \neq 0 \right\}.$$
   (a) Classificare Γ dal punto di vista proiettivo e Γ_0 dal punto di vista affine.
   (b) Trovare i due punti di intersezione tra Γ e r.
   (c) Stabilire se $\Gamma \cap r$ è connesso per archi.

Soluzioni

1. (a) La successione di punti $q_n = \left(\frac{1}{2n}, 1\right)$ di X converge a $(0,1)$, dunque $(0,1)$ appartiene a $\overline{X} = Y$. Non esistendo n tale che $\frac{1}{n} = 0$, il punto $(0,1)$ non appartiene a X.

   (b) L'insieme Y è chiuso per definizione ed è contenuto nella palla di centro $(0,0)$ e raggio 2, dunque è limitato. Dunque Y è compatto.

   (c) L'insieme Y non è connesso, poiché gli aperti disgiunti $A = \mathbb{R} \times \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ e $B = \mathbb{R} \times \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ di $\mathbb{R}^2$ sono tali che $Y \subset A \cup B$.

   (d) Essendo un sottospazio di uno spazio di Hausdorff, Y stesso è uno spazio di Hausdorff.

   (e) È evidente che il punto di X più vicino a p_n è p_{n+2}. Dato che

$$d(p_n, p_{n+2}) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right| = \frac{2}{n(n+2)}$$

   è sufficiente scegliere $r_n < \frac{2}{n(n+2)}$.

2. Scriviamo F per indicare A o B, secondo il caso che si considera, e α per indicare l'applicazione quoziente $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/F$. In ogni caso F è chiuso. Poniamo $\alpha(F) = \{p\}$.

   (a) $\mathbb{R}^2$, in quanto spazio metrico, è T4. Quindi per ogni $x \in \mathbb{R}^2 \setminus F$ esistono aperti U e V tali che $F \subset U$, $x \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Dato che $\alpha^{-1}(\alpha(U)) = U$, $\alpha(U)$ è aperto, e lo stesso vale per $\alpha(V)$. Inoltre $\alpha(U)$ e $\alpha(V)$ sono disgiunti. Allo stesso modo si mostra che punti distinti di $\mathbb{R}^2/F$ diversi da p hanno intorni aperti disgiunti.

   (b) Sia U un intorno di A. Allora $\alpha^{-1}(U)$ è un intorno di A e $U \setminus \{p\}$ è omeomorfo a $\alpha^{-1}(U) \setminus A$, che non è connesso. Invece ogni punto x di $\mathbb{R}^2$ ha intorni V tali che $V \setminus \{x\}$ sia connesso, ad esempio i dischi di centro x.

   (c) Definiamo una applicazione continua $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ponendo

$$\eta(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{se } |x| \geq 2, |y| \geq 1 \\ ((2-|y|)x + 2|y| - 2, y) & \text{se } 1 \leq x \leq 2, |y| \leq 1 \\ ((2-|y|)x - 2|y| + 2, y) & \text{se } -2 \leq x \leq -1, |y| \leq 1 \\ (|y|x, y) & \text{se } |x| \leq 1, |y| \leq 1 \end{cases}$$

   Questa applicazione collassa B in un solo punto (l'origine). Più esattamente, $\eta(p) = \eta(q)$ se e solo se $p, q \in B$. Questo dà una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}^2/B$ e $\mathbb{R}^2$, che è continua per la proprietà universale del quoziente. Per vedere che è un omeomorfismo basta mostrare, ad esempio, che è chiusa. Poniamo:

$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 2 \text{ o } |y| \geq 1\}$$
$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$$

   Questi due insiemi sono chiusi in $\mathbb{R}^2$ e la loro unione è $\mathbb{R}^2$. Se E è un chiuso in $\mathbb{R}^2$, $\eta(E) = \eta(E \cap P) \cup \eta(E \cap Q) = (E \cap P) \cup \eta(E \cap Q)$. Ma $E \cap P$ è chiuso perché intersezione di chiusi, mentre $\eta(E \cap Q)$ è chiuso perché Q è compatto, η è continua e $\mathbb{R}^2$ è di Hausdorff.

3. (a) $X = [0,1]$, $Y = [-1,1]$, $f_n : X \to Y$ definita da $f_n(t) = \sin(2\pi n t)$. Qualsiasi sottosuccessione di $\{f_n\}$ non è equicontinua e quindi non può convergere in F.

(b) Fissiamo un punto $x_0 \in X$ e definiamo una applicazione $\alpha : F \to Y$ ponendo $\alpha(f) = f(x_0)$. Questa applicazione è continua, e anche suriettiva perché, per ogni punto $y \in Y$, $y = \alpha(f)$, dove f è l'applicazione costante tale che $f(x) = y$ per ogni $x \in X$. Ne segue che Y è connesso se lo è F.

(c) $X = Y = S^1$. Le applicazioni di S^1 in sè sono classificate, a meno di omotopia, dal grado. Due applicazioni sufficientemente vicine (nel senso della metrica uniforme) hanno lo stesso grado. Quindi l'insieme F_n delle applicazioni di grado n è aperto. Dato che F è unione disgiunta degli F_n, non è connesso.

4. (a) Una matrice associata alla conica Γ è

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Γ è una conica proettiva generale dotata di punti reali e Γ_0 è un'iperbole generale.

(b) Mettendo a sistema le equazioni di Γ e r si ottengono i punti $[1 : 3 : 0]$ e $[0 : 1 : 1]$.

(c) L'unione di due singoletti disgiunti in $\mathbb{P}^2$ è sconnessa, dunque $\Gamma \cap r$ non è connesso (e dunque non è connesso per archi).