Corso di Geometria 1 – a.a. 2015-2016

Prova scritta del 23 gennaio 2017

1. (a) Dire quali, tra le seguenti collezioni di sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$, sono topologie su $\mathbb{Z}$, motivando le risposte.

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{Z} \,:\, A \text{ contiene almeno un intero dispari}\}$$
$$\mathcal{T}_2 = \{\mathbb{Z}\} \cup \{A \subset \mathbb{Z} \,:\, A \text{ contiene al massimo 3 elementi}\}$$
$$\mathcal{T}_3 = \{\mathbb{Z}\} \cup \{A \subset \mathbb{Z} \,:\, 0 \notin A\}$$
$$\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, 2\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}\}$$

ove $2\mathbb{Z}$ e $4\mathbb{Z}$ indicano rispettivamente i multipli interi di 2 e di 4.

(b) Verificare, tramite la definizione di funzione continua, che la funzione identità da $\mathbb{Z}$ dotato della topologia $\mathcal{T}_3$ a $\mathbb{Z}$ dotato della topologia $\mathcal{T}_4$ **non** è continua.

2. Sia H l'insieme delle successioni reali $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty$$
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty$$

Date $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ in H poniamo

$$d(\{x_n\},\{y_n\}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| \ ; \quad \delta(\{x_n\},\{y_n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| \ ;$$
$$D(\{x_n\},\{y_n\}) = d(\{x_n\},\{y_n\}) + \delta(\{x_n\},\{y_n\})$$

d, δ e D sono metriche su H.

(a) Mostrare che lo spazio metrico (H, D) è completo e (H, d) non lo è.

(b) Mostrare che l'applicazione identità dallo spazio metrico (H, D) allo spazio metrico (H, d) è continua ma non è un omeomorfismo.

3. Sia K una costante reale positiva. Siano $E = \{f \in C([0,1],[0,1]) : f \text{ è derivabile con derivata continua}\}$ e $F = \{f \in E : |f'(t)| \leq K \ \forall\, t \in [0,1]\}$.

(a) Mostrare che E non è equicontinuo.

(b) Mostrare che F è equicontinuo.

(c) Mostrare che F non è compatto.

4. Si considerino in $\mathbb{P}^2$ su campo reale le quadriche

$$\Gamma = \left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \,|\, 2x_0^2 + 3x_1^2 + x_2^2 + 4x_0x_1 - 2x_1x_2 = 0\right\}$$
$$\Delta = \left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \,|\, 3x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_0x_2 + x_1x_2 = 0\right\}$$

e in $\mathbb{R}^2$, identificato con $\left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \,|\, x_0 \neq 0\right\}$, le quadriche

$$\Gamma_0 = \left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \,|\, 2x_0^2 + 3x_1^2 + x_2^2 + 4x_0x_1 - 2x_1x_2 = 0,\ x_0 \neq 0\right\}$$
$$\Delta_0 = \left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \,|\, 3x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_0x_2 + x_1x_2 = 0,\ x_0 \neq 0\right\}.$$

(a) Classificare Γ e Δ dal punto di vista proiettivo e Γ_0 e Δ_0 dal punto di vista affine.

(b) Verificare che $[1 : -1 : -1] \in \Gamma$ e $[1 : -1 : -1] \notin \Delta$.

(c) Stabilire se $\Gamma \cup \Delta$ è connesso.

Soluzioni

1. (a) La collezione $\mathcal{T}_1$ non è una topologia, poiché per esempio $\{0, -1\}$ e $\{0, 1\}$ sono elementi di $\mathcal{T}_1$ ma la loro intersezione, cioè $\{0\}$, no.

   La collezione $\mathcal{T}_2$ non è una topologia, poiché per esempio $\{0, 1\}$ e $\{2, 3\}$ sono elementi di $\mathcal{T}_2$ ma la loro unione, cioè $\{0, 1, 2, 3\}$, no.

   La collezione $\mathcal{T}_3$ è una topologia: $\emptyset, \mathbb{Z} \in \mathcal{T}_3$; se $0 \notin A$ e $0 \notin B$ allora $0 \notin A \cap B$; se $0 \notin A_i$ per una famiglia A_i di elementi di $\mathcal{T}_3$ allora $0 \notin \bigcup A_i$.

   La collezione $\mathcal{T}_4$ è una topologia: $\emptyset, \mathbb{Z} \in \mathcal{T}_4$; essendo $\emptyset \subset 2\mathbb{Z} \subset 4\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, tutte le unioni e le intersezioni tra elementi di $\mathcal{T}_4$ sono elementi di $\mathcal{T}_4$.

   (b) La controimmagine dell'aperto $2\mathbb{Z} \in \mathcal{T}_4$ tramite la funzione identità è il sottoinsieme $2\mathbb{Z}$, che non è un elemento di $\mathcal{T}_3$ poiché $0 \in 2\mathbb{Z}$.

2. Notiamo che, se $\mathbf{x} = \{x_n\}$ e $\mathbf{y} = \{y_n\}$ sono elementi di H, per ogni n

$$|x_n - y_n| \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq D(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Quindi, se $\mathbf{x}^{(k)}$ è una successione di elementi di H che converge a un altro elemento $\mathbf{x} = \{x_n\}$ di H e indichiamo con $x_n^{(k)}$ l'n-esimo termine di $\mathbf{x}^{(k)}$, allora

$$\lim_{k \to \infty} x_n^{(k)} = x_n$$

per ogni n.

(a) Sia $\mathbf{x}^{(k)}$ una successione di Cauchy in (H, D). Come sopra, indichiamo con $x_n^{(k)}$ l'n-esimo termine di $\mathbf{x}^{(k)}$. Per quanto osservato sopra, per ogni n fissato la successione di numeri reali $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, x_n^{(3)}, \ldots$ è di Cauchy e quindi converge a un numero reale x_n. Indichiamo con $\mathbf{x}$ la successione $\{x_n\}$. Dato $\varepsilon > 0$ esiste k_0 tale che $D(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(h)}) < \varepsilon$ se $k, h \geq k_0$. Ne segue che $D(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}) < \varepsilon$ se $k \geq k_0$, e quindi che $\mathbf{x}^{(k)}$ converge a $\mathbf{x}$ in (H, D).

Sia $\mathbf{x} = \{x_n\}$ la successione $x_n = 1/n$ e, per ogni $k \geq 1$, sia $\mathbf{x}^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}$ la successione definita da

$$x_n^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ se } n \leq k \\ 0 \text{ se } n > k \end{cases}$$

Se $h \geq k$, la distanza $d(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(h)})$ è minore di $1/k$. Quindi la successione $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ è di Cauchy in (H, d). Però questa successione non converge in (H, d) perché $\lim_k x_n^{(k)} = x_n$ per ogni fissato n e la successione $\mathbf{x}$ non appartiene ad H perché non sommabile.

(b) Indichiamo con ι l'applicazione in questione. Dato che $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, ι è Lipschitziana, quindi continua. Sia $\mathbf{x}$ la successione identicamente nulla. Per ogni a strettamente compreso tra 0 e 1 definiamo una successione $\mathbf{y}^{(a)} = \{y_n^{(a)}\}$ ponendo $y_n^{(a)} = (1-a)a^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ Notiamo che per ogni a

$$\sum |y_n^{(a)}| = (1-a)(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots) = (1-a)\frac{1}{1-a} = 1.$$

Quindi $\mathbf{y}^{(a)} \in H$ e
$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{(a)}) \geq \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{(a)}) = 1.$$
Invece
$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{(a)}) = 1 - a$$
tende a zero per a tendente a 1. Dunque l'inversa di ι non è continua.

3. (a) Per ogni intero positivo n la funzione f_n definita da
$$f_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\pi n t$$
appartiene a E. D'altra parte $f_n(0) = 1$ e $f_n(1/2n) = 0$ per ogni n. Quindi E non è equicontinuo.

(b) Per ogni $f \in F$
$$|f(t) - f(s)| = \left| \int_s^t f'(u)du \right| \leq K|t - s|$$
Quindi ogni funzione in F è Lipschitziana di costante K, e dunque F è equicontinuo.

(c) F non è compatto perché non è chiuso in $C([0,1],[0,1])$. Infatti la funzione
$$f(t) = \begin{cases} K't + 1/4 \text{ se } t \leq \frac{1}{2} \\ K'(1-t) + 1/4 \text{ se } t \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$
dove $K' = \min(K, 1)$, non è in F perché non è derivabile in 0 ma è approssimabile uniformemente con funzioni in F. Ad esempio, la successione di funzioni
$$f_n(t) = \frac{2K'+1}{4} - K'\sqrt{\frac{1}{n} + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2}$$
è in F (almeno per n sufficientemente grande) e converge uniformemente a f.

4. (a) Una matrice associata alla conica Γ è
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
ed una matrice associata alla conica Δ è
$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
Γ è dunque una conica proiettiva degenere, mentre Δ è una conica proettiva generale dotata di punti reali. Γ_0 è un'ellisse degenere (dunque un punto), mentre Δ_0 è un'iperbole generale.

(b) Sostituendo nelle equazioni di Γ e Δ, si ottiene
$$2(1)^2 + 3(-1)^2 + (-1)^2 + 4(1)(-1) - 2(-1)(-1) = 0$$
$$3(1)^2 + (-1)^2 - (-1)^2 - (1)(-1) + (-1)(-1) \neq 0.$$

(c) L'unione di due coniche in $\mathbb{P}^2$ è connessa solo se non sono disgiunte. Poiché il punto Γ non appartiene a Δ, si ha che $\Gamma \cup \Delta$ è sconnesso.