Corso di Geometria 1 – a.a. 2014-2015

Prova scritta di topologia dell'8 settembre 2015

1. Sia $\mathcal{B}$ l'insieme degli intervalli $[a, b[\subset \mathbb{R}$.

   (a) Mostrare che $\mathcal{B}$ è base di una topologia $\mathcal{A}$ su $\mathbb{R}$.

   Sia X lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ e sia Y la retta reale con la topologia usuale.

   (b) Mostrare che l'applicazione identità di $\mathbb{R}$ dà una applicazione continua $\alpha : X \to Y$ ma che l'inversa di α non è continua.

   (c) Trovare tutte le componenti connesse di X.

   (d) Mostrare che non esiste una base numerabile per la topologia $\mathcal{A}$.

2. Sia $\mathcal{C}$ lo spazio delle funzioni continue da $[0, 1]$ in sè, con la metrica usuale

$$d(f, g) = \max_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$$

   e sia K una costante positiva compresa tra 0 e 1. Per ogni $f \in \mathcal{C}$ sia $Tf : [0, 1] \to [0, 1]$ la funzione definita da

$$Tf(t) = \min\{f(t), K\}$$

   (a) Mostrare che Tf è continua per ogni $f \in \mathcal{C}$

   (b) Mostrare che $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ è Lipschitziana di costante 1

   (c) Trovare tutti i punti fissi di T

3. (a) Siano X e Y spazi metrici, e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni continue $X \to Y$. Indichiamo con $\overline{\mathcal{F}}$ la chiusura di $\mathcal{F}$ nella topologia della convergenza uniforme. Mostrare che se $\mathcal{F}$ è equicontinua anche $\overline{\mathcal{F}}$ lo è.

   (b) Sia K una costante positiva. Supponiamo che X e Y siano compatti e sia $\mathcal{G}$ l'insieme delle funzioni Lipschitziane $X \to Y$ con costante di Lipschitz $\leq K$. Mostrare che $\mathcal{G}$, con la topologia della convergenza uniforme, è compatto.

   (c) Enunciare il teorema di Ascoli e illustrare con esempi la necessità delle ipotesi.

Soluzioni

1. (a) Se $A, B \in \mathcal{B}$ anche $A \cap B \in \mathcal{B}$. Inoltre l'unione di tutti gli elementi di $\mathcal{B}$ è $\mathbb{R}$.

   (b) Gli intervalli aperti appartengono a $\mathcal{A}$. Infatti

$$]a, b[= \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\gg 0}} [a + 1/n, b[$$

   Quindi ogni aperto della topologia usuale di $\mathbb{R}$ appartiene ad $\mathcal{A}$. Questo mostra che α è continua. Invece α^{-1} non è continua perché gli intervalli $[a, b[$ non sono aperti in Y.

(c) Le semirette $]-\infty, a[$ e $[a,+\infty[$ sono aperte in X dato che

$$]-\infty, a[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a-n, a[$$

$$[a,+\infty[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a, a+n[$$

Quindi, se $Z \subset X$ contiene due punti distinti $x < y$, allora è unione dei due aperti disgiunti non vuoti $Z \cap]-\infty, a[$ e $Z \cap [a,+\infty[$, dove $x < a < y$. Ne segue che i soli sottinsiemi connessi di Z sono quelli contenenti un solo punto. Questi sono le componenti connesse di Z.

(d) Sia $\mathcal{C}$ una base di $\mathcal{A}$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'intervallo $[a, a+1[$ è unione di elementi di $\mathcal{C}$, e tra questi ve nè almeno uno, che indichiamo con C_a, che ha a come minimo. I C_a sono tra loro distinti perché hanno minimi distinti. Dunque $\mathcal{C}$ contiene un sottinsieme che è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$ e che quindi non è numerabile. Ne segue che anche $\mathcal{C}$ non è numerabile.

2. (a) Dati $s, t \in [0,1]$,

$$|Tf(s) - Tf(t)| = \begin{cases} 0 \text{ se } K \leq f(s),\ K \leq f(t) \\ |f(s) - f(t)| \text{ se } K \geq f(s),\ K \geq f(t) \\ |f(t) - K| \text{ se } f(s) \geq K \geq f(t) \\ |f(s) - K| \text{ se } f(t) \geq K \geq f(s) \end{cases}$$

In ogni caso $|Tf(s) - Tf(t)| \leq |f(s) - f(t)|$. Dati $s \in [0,1]$ e $\varepsilon > 0$ c'è $\delta > 0$ tale che $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ se $|s - t| < \delta$, visto che f è continua. Quindi $|Tf(s) - Tf(t)| \leq |f(s) - f(t)| < \varepsilon$ se $|s - t| < \delta$.

(b) Date $f, g \in \mathcal{C}$ e $t \in [0,1]$,

$$|Tf(t) - Tg(t)| = \begin{cases} 0 \text{ se } K \leq f(t),\ K \leq g(t) \\ |f(t) - g(t)| \text{ se } K \geq f(t),\ K \geq g(t) \\ |g(t) - K| \text{ se } f(t) \geq K \geq g(t) \\ |f(t) - K| \text{ se } g(t) \geq K \geq f(t) \end{cases}$$

In ogni caso $|Tf(t) - Tg(t)| \leq |f(t) - g(t)|$. In altre parole $d(Tf, Tg) \leq d(f, g)$.

(c) $Tf = f$ se e solo se $f(t) \leq K$ per ogni $t \in [0,1]$.

3. (a) Dati $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $d(f(x), f(x')) < \varepsilon/3$ per ogni x' tale che $d(x, x') < \delta$ e ogni $f \in \mathcal{F}$. Se $g \in \overline{\mathcal{F}}$ esiste $f \in \mathcal{F}$ tale che $d(f, g) < \varepsilon/3$. Ma allora

$$d(g(x), g(x')) \leq d(g(x), f(x)) + d(f(x), f(x')) + d(f(x'), g(x')) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ogni volta che $d(x, x') < \delta$.

(b) In base al teorema di Ascoli basta mostrare che $\mathcal{G}$ è equicontinuo e chiuso nello spazio delle funzioni continue da X a Y. Dato $\varepsilon > 0$, se $d(x, x') < \varepsilon/K$ allora

$$d(f(x), f(x')) \leq K d(x, x') < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

per ogni $f \in \mathcal{G}$. Quindi $\mathcal{G}$ è equicontinua. Se poi $\{f_n\}$ è una successione di elementi di $\mathcal{G}$ convergente a f allora

$$d(f(x), f(x')) = \lim_{n\to\infty} d(f_n(x), f_n(x')) \leq \lim_{n\to\infty} K d(x, x') = K d(x, x')$$