1 Le distribuzioni armoniche sono funzioni analitiche

Sia u una distribuzione su un aperto A di $\mathbb{C}$. Se z è la coordinata standard su $\mathbb{C}$ indichiamo con x e y le sue parti reale e immaginaria. Supponiamo che u sia armonica, cioè che

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

o equivalentemente che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{1}{4}\Delta u = 0$$

Vogliamo dimostrare in primo luogo che u è una funzione liscia (cioè C^∞). In seguito mostreremo che u è addirittura analitica reale. Il problema è locale e quindi basta mostrare che u è liscia su un intorno di p per ogni punto $p \in A$. Moltiplichiamo u per una funzione liscia non negativa con supporto in A che sia identicamente uguale a 1 su un intorno di p e estendiamo il risultato a una distribuzione v su $\mathbb{C}$ ponendo v uguale a zero fuori da A. Dunque v è armonica su un intorno di p.

Sia χ una funzione liscia non negativa a supporto compatto contenente 0. Possiamo scegliere χ in modo che sia funzione solo della distanza dall'origine e abbia integrale uguale a 1. Poniamo poi

$$\chi_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-2}\chi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$$

di modo che

$$\int_{\mathbb{C}} \chi_\varepsilon(z) dxdy = 1$$

Ricordiamo che il prodotto di convoluzione di due funzioni a e b su $\mathbb{C}$ è definito, quando questo ha senso, da

$$a * b(w) = \int_{\mathbb{C}} a(w-z)b(z)dxdy = \int_{\mathbb{C}} a(z)b(w-z)dxdy$$

Se f è una distribuzione e φ una funzione liscia a supporto compatto, entrambe su $\mathbb{C}$, la convoluzione $f * \varphi$ è la funzione

$$f * \varphi(w) = f_z(\varphi(w-z))$$

Si sa che $f * \varphi$ è una funzione liscia e che

$$P(f * \varphi) = (Pf) * \varphi = f * (P\varphi) \tag{1}$$

per ogni operatore differenziale a coefficienti costanti P. Si sa inoltre che il prodotto di convoluzione è associativo, cioè che, se ψ è un'altra funzione liscia a supporto compatto,

$$f * (\varphi * \psi) = (f * \varphi) * \psi$$

Si sa anche che $f * \chi_\varepsilon$ converge debolmente a f per $\varepsilon \to 0$. Per questi e altri risultati sui prodotti di convoluzione si veda il capitolo 1 di Hörmander, *Linear partial differantial operators*.

Torniamo alla distribuzione v. Per la (1) le funzioni $v*\chi_\varepsilon$ sono armoniche dove lo è v. Vi è dunque una successione v_n di funzioni liscie che converge debolmente a v, e le v_n sono armoniche dove lo è v. Notiamo anche che, se η è una funzione liscia a supporto compatto, $v_n * \eta \to v * \eta$. In effetti, se φ è un'altra funzione a supporto compatto e $\check{\varphi}$ è la funzione $\check{\varphi}(z) = \varphi(-z)$,

$$v_n * \eta(\varphi) = v_n * \eta * \check{\varphi}(0) \to v * \eta * \check{\varphi}(0) = v * \eta(\varphi)$$

perché $v_n * (\eta * \check{\varphi})$ converge a $v * (\eta * \check{\varphi})$.

Lemma 1. *Sia f una funzione liscia su $\mathbb{C}$ e sia U un aperto su cui f è armonica. Sia p un punto di U. Se $2\varepsilon < d(p, \partial U)$ allora $f = f * \chi_\varepsilon$ sul disco di centro p e raggio ε.*

Supponendo dimostrato il lemma, questo implica che, nell'intorno di un punto in cui v è armonica, per ε sufficientemente piccolo $v_n * \chi_\varepsilon = v_n$ e quindi, passando al limite, $v * \chi_\varepsilon = v$; ne segue che su un tale intorno v è liscia. In definitiva u è liscia e quindi vale il seguente risultato.

Proposizione 2. *Sia u una distribuzione su un aperto $A \subset \mathbb{C}$. Se u è armonica allora u è una funzione liscia.*

Resta da dimostrare il lemma 1. Poniamo $\eta = \chi_\varepsilon$. Sia q un punto di U e supponiamo che il disco chiuso di centro q e raggio ε sia contenuto in U. La formula del valor medio per funzioni armoniche dice che, quando $r \leq \varepsilon$,

$$f(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(q + re^{\sqrt{-1}\vartheta}) d\vartheta$$

Allora

$$\begin{aligned} f * \eta(q) &= \int_{\mathbb{C}} f(z)\eta(q - z) dxdy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(q + re^{\sqrt{-1}\vartheta})\eta(r) r dr d\vartheta \\ &= f(q) 2\pi \int_0^\infty \eta(r) r dr = f(q) \int_{\mathbb{C}} \eta(z) dxdy = f(q) \end{aligned}$$

Mostreremo ora che in effetti u è analitica reale.

Teorema 3. *Sia u una distribuzione su un aperto $A \subset \mathbb{C}$. Se u è armonica allora u è una funzione analitica reale.*

Sappiamo già che u è una funzione liscia. Sia la parte reale che quella immaginaria di u sono armoniche. Quindi nella dimostrazione possiamo supporre che u sia una funzione a valori reali. Basta dimostrare il seguente lemma.

Lemma 4. *Sia g una funzione armonica reale sul rettangolo $R = \{(x + \sqrt{-1}y) \in \mathbb{C} : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta\}$. Allora esiste una funzione olomorfa f la cui parte reale è g.*

Dimostrazione. Dobbiamo trovare una funzione a valori reali $h(x, y)$ tale che $f = g + \sqrt{-1}h$ soddisfi le equazioni di Cauchy-Riemann, cioè tale che

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

o ancora che

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} \quad ; \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x} \tag{2}$$

Poniamo

$$h(x, y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)dt + a(x)$$

dove a è una funzione liscia da determinare. La prima delle (2) è ovviamente soddisfatta. Poi

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) &= \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t)dt + a'(x) = -\int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, t)dt + a'(x) \\ &= -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y_0) + a'(x) \end{aligned}$$

Basta quindi prendere come funzione $a(x)$ una primitiva di $-\frac{\partial g}{\partial y}(x, y_0)$. $\square$

Una dimostrazione alternativa del lemma è la seguente. Si osserva che la funzione

$$\ell = \frac{\partial g}{\partial x} - \sqrt{-1}\frac{\partial g}{\partial y}$$

soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann e quindi è olomorfa. Sia f una sua primitiva. Le equazioni di Cauchy-Riemann per f, unite al fatto che f è una primitiva di ℓ, implicano che le derivate della sua parte reale rispetto a x e y sono rispettivamente uguali a $\frac{\partial g}{\partial x}$ e a $\frac{\partial g}{\partial y}$. Dunque la parte reale di f differisce da g per una costante. Dato che f è definita a meno di una costante questo termina la dimostrazione.