

NOTE SUL TEOREMA DI DE RHAM

MAURIZIO CORNALBA

Sia $K^{\bullet, \bullet}$ un complesso doppio di gruppi abeliani con differenziali $d' : K^{p,q} \rightarrow K^{p+1,q}$ e $d'' : K^{p,q} \rightarrow K^{p,q+1}$, dove $d'^2 = d''^2 = d'd'' + d''d' = 0$. Indichiamo con K^\bullet il corrispondente complesso totale con differenziale $d = d' + d''$ e $K^h = \bigoplus_{p+q=h} K^{p,q}$. Supponiamo che $K^{\bullet, \bullet}$ sia a gradi positivi, nel senso che $K^{p,q} = 0$ se $p < 0$ o $q < 0$. Poniamo $B^p = \ker(d'' : K^{p,0} \rightarrow K^{p,1})$. Allora $d'B^p \subset B^{p+1}$ e $\dots \rightarrow B^{p-1} \xrightarrow{d'} B^p \xrightarrow{d'} B^{p+1} \rightarrow \dots$ è un complesso.

Lemma 1. *Se $H_{d''}^q(K^{p,\bullet}) = 0$ per ogni p e per ogni $q > 0$ l'inclusione $B^\bullet \hookrightarrow K^\bullet$ induce isomorfismi*

$$\alpha_p : H^p(B^\bullet) \xrightarrow{\cong} H^p(K^\bullet)$$

per ogni p .

Dimostrazione. Dimostriamo in primo luogo che α_p è iniettiva. Se $x \in B^p$, $d'x = 0$ e $x = dy$ per qualche $y \in K^{p-1}$, scriviamo $y = \sum_i y^{p-1-i,i}$ dove $y^{p-1-i,i} \in K^{p-1-i,i}$. Definiamo *livello* di y il massimo i tale che $y^{p-1-i,i} \neq 0$. Dire che $x = dy$ equivale a dire che $x = d'y^{p-1,0} + d''y^{p-1-i,i} + d'y^{p-2-i,i+1} = 0$ per ogni $i \geq 0$. In particolare, se ℓ è il livello di y , allora $d''y^{p-1-\ell,\ell} = 0$. Se $\ell > 0$, per le ipotesi del lemma $y^{p-1-\ell,\ell} = d''z$ per qualche $z \in K^{p-1-\ell,\ell-1}$. Se poniamo $y' = y - dz$, allora $x = dy'$ e il livello di y' non supera $\ell - 1$. Ripetendo più volte questa operazione si arriva a un y'' di livello 0 tale che $x = dy''$. Ma allora $y'' \in B^p$ e $x = d'y''$. Questo mostra che α_p è iniettiva.

La dimostrazione della suriettività di α_p è simile. Sia $y \in K^p$ tale che $dy = 0$ e sia ℓ il livello di y ; dunque $d''y^{p-\ell,\ell} = 0$. Se $\ell > 0$ c'è $z \in K^{p-\ell,\ell-1}$ tale che $y^{p-\ell,\ell} = d''z$. Allora y e $y - dz$ rappresentano la stessa classe in $H^p(K^\bullet)$ ma il livello di $y - dz$ è minore di quello di y . Possiamo quindi supporre che y abbia livello zero, cioè che appartenga a $K^{p,0}$. Ma allora dire che $dy = 0$ equivale a dire che $d''y = 0$, cioè che $y \in B^p$, e che $d'y = 0$. Dunque α_p è suriettiva. \square

Sia X una varietà differenziabile connessa, di Hausdorff e a base numerabile di dimensione n . Per ogni aperto U di X indichiamo con $A^p(U)$ lo spazio vettoriale reale delle p -forme differenziali lisce su U , e con $C^p(U, \mathbb{R})$ lo spazio delle p -cocatene singolari reali in U , cioè il duale dello spazio vettoriale reale $C_p(U, \mathbb{R})$ delle p -catene singolari reali in U . In altre parole, un elemento di $C^p(U, \mathbb{R})$ è il dato di un numero reale per ogni p -simpleso singolare in U . Nella versione standard della teoria singolare si considerano semplici singolari *continui*, ma è utile considerare una versione della teoria in cui ci si limita a semplici singolari *lisci*, cioè applicazioni dal simpleso standard $\Delta_p = \{(x_0, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^{p+1} : \sum x_i = 1, x_i \geq 0, i = 0, \dots, p\}$ in U che hanno una estensione C^∞ a un intorno di Δ_p nell'iperpiano di equazione $\sum x_i = 1$. Come vedremo, nel nostro caso i gruppi di coomologia singolare

$$H^p(X, \mathbb{R}) = H^p(C^\bullet(U, \mathbb{R}))$$

calcolati usando semplici continui o lisci coincidono. Dato un ricoprimento aperto \mathcal{V} di X , si indica con $C_p^\mathcal{V}(X, \mathbb{R})$ il sottospazio di $C_p(X, \mathbb{R})$ generato dai semplici singolari con immagine in un aperto di \mathcal{V} , e con $C_p^\mathcal{V}(X, \mathbb{R})$ il suo duale. I $C_p^\mathcal{V}(X, \mathbb{R})$ costituiscono un

complesso, i cui gruppi di coomologia vengono indicati con $H_{\mathcal{V}}^p(X, \mathbb{R})$. Ricordiamo che la mappa naturale

$$H^p(X, \mathbb{R}) \rightarrow H_{\mathcal{V}}^p(X, \mathbb{R})$$

è un isomorfismo, sia nella teoria continua che in quella liscia (cf. Hatcher, *Algebraic topology*, Proposition 2.21, per la versione in omologia di questo risultato). La coomologia del complesso $A^\bullet(X)$ viene chiamata *coomologia di de Rham* di X e si pone $H_{dR}^q(X) = H^q(A^\bullet(X))$.

Scegliamo una metrica riemanniana su X e un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X che sia localmente finito e costituito da aperti geodeticamente convessi e a chiusura compatta. Per ogni multiindice (i_0, \dots, i_q) , $i_j \in I$, poniamo

$$U_{i_0, \dots, i_q} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}.$$

Il complesso $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ è dato dagli spazi vettoriali reali

$$C^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \prod_{U_{i_0, \dots, i_q} \neq \emptyset} \mathbb{R}$$

e dal differenziale $\delta : C^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ definito da

$$(1) \quad (\delta\varphi)_{i_0, \dots, i_{q+1}} = \sum_j (-1)^j \varphi_{i_0, \dots, \widehat{i}_j, \dots, i_{q+1}}$$

Quello appena descritto viene chiamato complesso delle cocatene reali del ricoprimento \mathcal{U} .

Ci serviranno due complessi doppi $L^{\bullet, \bullet}$ e $K^{\bullet, \bullet}$ definiti da:

$$L^{p, q} = \prod_{U_{i_0, \dots, i_q} \neq \emptyset} A^p(U_{i_0, \dots, i_q}),$$

$$K^{p, q} = \prod_{U_{i_0, \dots, i_q} \neq \emptyset} C^p(U_{i_0, \dots, i_q}, \mathbb{R}),$$

I differenziali del primo complesso sono la differenziazione esterna $d : L^{p, q} \rightarrow L^{p+1, q}$ e il differenziale “di Čech” $\delta : L^{p, q} \rightarrow L^{p, q+1}$ dato dalla (1), dove φ è il dato di una p -forma $\varphi_{i_0, \dots, i_q}$ per ogni U_{i_0, \dots, i_q} non vuoto e $\varphi_{i_0, \dots, \widehat{i}_j, \dots, i_{q+1}}$ si intende ristretta a $U_{i_0, \dots, i_{q+1}}$. Naturalmente, per garantire che le relazioni di commutazione richieste tra i differenziali siano soddisfatte, sarà necessario cambiare questi ultimi per un segno, ad esempio rimpiazzando $\delta : L^{p, q} \rightarrow L^{p, q+1}$ con $(-1)^p \delta$. I differenziali del secondo complesso sono il cobordo in coomologia singolare $\partial^* : C^p \rightarrow C^{p+1}$ e ancora il differenziale “di Čech” dato da (1), dove, sempre per semplicità di notazione, si sottintende che $\varphi_{i_0, \dots, \widehat{i}_j, \dots, i_{q+1}}$ indica in realtà il pullback $\rho^*(\varphi_{i_0, \dots, \widehat{i}_j, \dots, i_{q+1}})$ via l’inclusione $\rho : U_{i_0, \dots, i_{q+1}} \rightarrow U_{i_0, \dots, \widehat{i}_j, \dots, i_{q+1}}$. Anche in questo caso è necessario modificare il segno di δ come indicato sopra.

Lemma 2.

$$H_d^p(L^{\bullet, q}) = \begin{cases} C^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \text{se } p = 0 \\ 0 & \text{se } p > 0 \end{cases}$$

$$H_\delta^q(L^{p, \bullet}) = \begin{cases} A^p(X) & \text{se } q = 0 \\ 0 & \text{se } q > 0 \end{cases}$$

$$H_{\partial^*}^p(K^{\bullet, q}) = \begin{cases} C^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \text{se } p = 0 \\ 0 & \text{se } p > 0 \end{cases}$$

$$H_\delta^q(K^{p, \bullet}) = \begin{cases} C_{\mathcal{U}}^p(X, \mathbb{R}) & \text{se } q = 0 \\ 0 & \text{se } q > 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Per ogni multiindice (i_0, \dots, i_q) l'aperto U_{i_0, \dots, i_q} è geodeticamente connesso, e quindi omeomorfo a un aperto stellato in \mathbb{R}^n . La prima affermazione segue allora dal lemma di Poincaré nella seguente versione.

Lemma 3 (Lemma di Poincaré). *Sia V un aperto in \mathbb{R}^n , stellato intorno a $v_0 \in V$. Sia $\varphi \in A^p(V)$ una forma chiusa, tale cioè che $d\varphi = 0$. Se $p = 0$, allora φ è una funzione costante su V . Se $p > 0$ esiste $\psi \in A^{p-1}(V)$ tale che $\varphi = d\psi$. Più esattamente, per ogni $p > 0$ esiste una applicazione lineare $H : A^p(V) \rightarrow A^{p-1}(V)$ tale che*

$$\eta = H(d\eta) + dH(\eta)$$

per ogni p -forma η su V .

Dimostrazione. La prima affermazione segue dall'osservazione che V è connesso per archi e φ localmente costante. Supponiamo che $p > 0$. Senza perdita di generalità si può supporre che v_0 sia l'origine di \mathbb{R}^n . Indichiamo con x_1, \dots, x_n le coordinate in \mathbb{R}^n . Sia $h : V \times [0, 1] \rightarrow V$ la mappa $(v, t) \mapsto tv$. Allora $h^*(\eta) = \eta_1 + dt \wedge \eta_0$, dove le forme η_1, η_0 sono combinazioni lineari, a coefficienti funzioni, di monomi della forma dx_I , con I un multiindice. Poniamo

$$H(\eta) = \int_0^1 \eta_0 dt$$

dove si intende che ad essere integrati sono i coefficienti dei dx_I . Data una forma α su $V \times [0, 1]$, sia $d_x \alpha$ il differenziale esterno di α rispetto alle sole variabili x_1, \dots, x_n . Allora

$$h^*(d\eta) = dh^*(\eta) = d_x \eta_1 + dt \wedge \frac{\partial \eta_1}{\partial t} - dt \wedge d_x \eta_0$$

e quindi

$$H(d\eta) = \int_0^1 \frac{\partial \eta_1}{\partial t} dt - \int_0^1 (d_x \eta_0) dt = \eta_1|_{t=1} - \eta_1|_{t=0} - d \int_0^1 \eta_0 dt = \eta - dH(\eta)$$

Se φ è una p -forma chiusa su V , ne segue che $\varphi = d\psi$, con $\psi = H(\varphi)$. \square

Passiamo alla seconda affermazione del lemma. Sia α un elemento di $L^{p,q}$, cioè il dato di una p -forma α_{i_0, \dots, i_q} per ogni multiindice (i_0, \dots, i_q) tale che U_{i_0, \dots, i_q} sia non vuoto. Supponiamo che $\delta\alpha = 0$. Se $q = 0$ ciò significa che $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_0}$ per ogni scelta di indici i_0, i_1 , e quindi che esiste $\alpha' \in A^p(X)$ tale che la restrizione di α' a U_i sia α_i per ogni i . Questa p -forma è naturalmente unica. Supponiamo ora che $q > 0$. Scegliamo una partizione dell'unità $\{\chi_i\}_{i \in I}$ liscia e subordinata al ricoprimento \mathcal{U} . Se $U_{i_0, \dots, i_{q-1}} \neq \emptyset$ poniamo

$$\beta_{i_0, \dots, i_{q-1}} = \sum_{U_{i, i_0, \dots, i_{q-1}} \neq \emptyset} \chi_i \alpha_{i, i_0, \dots, i_{q-1}},$$

dove si sottintende che $\chi_i \alpha_{i, i_0, \dots, i_{q-1}}$ viene posto uguale a zero su $U_{i_0, \dots, i_{q-1}} \setminus U_{i, i_0, \dots, i_{q-1}}$. Si noti che tutti gli addendi della somma sono lisci e che ogni punto ha un intorno su cui solo un numero finito tra essi è non nullo, dato che \mathcal{U} è localmente finito. I $\beta_{i_0, \dots, i_{q-1}}$ costituiscono un elemento β di $L^{p, q-1}$ e

$$(\delta\beta)_{i_0, \dots, i_q} = \sum_j (-1)^j \beta_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_q} = \sum_i \sum_j (-1)^j \chi_i \alpha_{i, i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_q}.$$

Dato che $\delta\alpha = 0$ la somma interna è uguale a $\chi_i \alpha_{i_0, \dots, i_q}$ e quindi, tenendo conto del fatto che $\sum \chi_i \equiv 1$,

$$(\delta\beta)_{i_0, \dots, i_q} = \alpha_{i_0, \dots, i_q}$$

Quindi $\alpha = \delta\beta$.

Occupiamoci ora della terza affermazione del lemma. È chiaro che

$$H_{\partial^*}^p(K^{\bullet,q}) = \prod_{U_{i_0,\dots,i_q} \neq \emptyset} H^p(U_{i_0,\dots,i_q}, \mathbb{R})$$

Dato che U_{i_0,\dots,i_q} è geodeticamente convesso, è anche contraibile. Dunque, per la proprietà di omotopia, ha la stessa coomologia di un punto, cioè nulla in grado positivo e pari a \mathbb{R} in grado zero. Ne segue che

$$H_{\partial^*}^p(K^{\bullet,q}) = \begin{cases} \prod_{U_{i_0,\dots,i_q} \neq \emptyset} \mathbb{R} = C^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \text{se } p = 0 \\ 0 & \text{se } p > 0 \end{cases}$$

Resta da dimostrare l'ultima affermazione del lemma. Per farlo scriviamo diversamente il complesso doppio $K^{\bullet,\bullet}$. Sia S_p l'insieme dei p -simplessi singolari in X . Per ogni tale simpletso $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ sia I_σ l'insieme degli $i \in I$ tali che $\sigma(\Delta_p) \subset U_i$; è un insieme finito dato che il ricoprimento \mathcal{U} è localmente finito e $\sigma(\Delta_p)$ è compatto. Notiamo che un elemento a di $K^{p,q}$ consiste del dato di un numero reale $a_{i_0,\dots,i_q}(\sigma)$ per ogni p -simpletso singolare σ in U_{i_0,\dots,i_q} , tale cioè che $i_0, \dots, i_q \in I_\sigma$. Ricordiamo anche che il differenziale δ di $K^{\bullet,\bullet}$ è

$$(2) \quad \delta(a)_{i_0,\dots,i_{q+1}}(\sigma) = \sum_j (-1)^j a_{i_0,\dots,\widehat{i}_j,\dots,i_{q+1}}(\sigma)$$

Dunque

$$K^{p,\bullet} = \prod_{\sigma \in S_p} D_\sigma^\bullet,$$

dove

$$D_\sigma^q = \prod_{(i_0,\dots,i_q) \in I_\sigma^{q+1}} \mathbb{R}$$

e $\delta : D_\sigma^q \rightarrow D_\sigma^{q+1}$ è dato dalla (2). Per concludere basterà dunque mostrare che $H^q(D_\sigma^\bullet)$ è nullo per $q > 0$ e uguale a \mathbb{R} per $q = 0$. Se $a \in D_\sigma^0$, dire che $\delta a = 0$ equivale a dire che $a_j = a_i$ per ogni scelta di $i, j \in I_\sigma$. Questo mostra che $H^0(D_\sigma^\bullet) = \mathbb{R}$. Indichiamo con k la cardinalità di I_σ . Se $q > 0$ e $a \in D_\sigma^q$ poniamo

$$b_{i_0,\dots,i_{q-1}} = \frac{1}{k} \sum_{i \in I_\sigma} a_{i,i_0,\dots,i_{q-1}}.$$

Se $\delta a = 0$

$$(\delta b)_{i_0,\dots,i_q} = \frac{1}{k} \sum_{i \in I_\sigma} \sum_j (-1)^j a_{i,i_0,\dots,\widehat{i}_j,\dots,i_q} = \frac{1}{k} \sum_{i \in I_\sigma} a_{i_0,\dots,i_q} = a_{i_0,\dots,i_q}.$$

In altre parole, $a = \delta b$. □

Combinando i lemmi 1 e 2 si ottiene immediatamente il seguente risultato.

Corollario 1. *Se L^\bullet e K^\bullet denotano i complessi totali associati, rispettivamente, a $L^{\bullet,\bullet}$ e $K^{\bullet,\bullet}$, le inclusioni*

$$A^\bullet(X) \hookrightarrow L^\bullet \hookrightarrow C^\bullet(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \hookrightarrow K^\bullet \hookrightarrow C_{\mathcal{U}}^\bullet(X, \mathbb{R})$$

inducono isomorfismi in coomologia. In particolare,

$$H_{dR}^q(X) \simeq H^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \simeq H^q(X, \mathbb{R}).$$

Notiamo che questo risultato risulta valido, senza modifiche alla dimostrazione, sia che si usino catene continue, sia che si usino catene lisce per calcolare la coomologia singolare di X . Ne segue in particolare che la coomologia singolare di una varietà differenziabile si può indifferentemente calcolare usando uno qualsiasi di questi due tipi di catene.

Il teorema di de Rham dà forma esplicita all'isomorfismo tra gruppi di coomologia di de Rham e singolari la cui esistenza è stata appena dimostrata. Consideriamo l'applicazione $P : A^\bullet(X) \rightarrow C^\bullet(X, \mathbb{R})$ definita da

$$P(\varphi)(c) = \int_c \varphi,$$

dove φ è una p -forma e c una p -catena singolare. Questa applicazione è chiaramente lineare. Inoltre

$$P(d\alpha)(c) = \int_c d\alpha = \int_{\partial c} \alpha = P(\alpha)(\partial c) = \partial^*(P(\alpha))(c)$$

per il teorema di Stokes. Dunque $Pd = \partial^*P$, cioè P è un omomorfismo di complessi. Ne segue che P induce omomorfismi

$$P_q : H_{dR}^q(X) \rightarrow H^q(X, \mathbb{R})$$

per ogni q .

Teorema 1 (Teorema di de Rham). *L'omomorfismo P_q è un isomorfismo per ogni $q \geq 0$ e coincide con l'isomorfismo dato dal corollario 1.*

L'omomorfismo P ha un analogo a livello dei complessi doppi $L^{\bullet, \bullet}$ e $K^{\bullet, \bullet}$, dato dalla collezione degli omomorfismi $P : A^p(U_{i_0, \dots, i_q}) \rightarrow C^p(U_{i_0, \dots, i_q}, \mathbb{R})$ per ogni $p \geq 0$ e ogni multiindice (i_0, \dots, i_q) . Indicheremo questo omomorfismo $L^{\bullet, \bullet} \rightarrow K^{\bullet, \bullet}$ con la stessa lettera P . Il teorema di de Rham segue immediatamente dal corollario 1 e dal seguente lemma.

Lemma 4. *Il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} A^\bullet & \xrightarrow{\quad} & L^{\bullet, \bullet} \\ \downarrow P & & \downarrow P \\ C^\bullet(X, \mathbb{R}) & \longrightarrow & C_{\mathcal{U}}^\bullet(X, \mathbb{R}) \longrightarrow K^{\bullet, \bullet} \end{array} \quad \begin{array}{c} \swarrow \alpha \\ C^\bullet(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \\ \searrow \beta \end{array}$$

è commutativo.

Dimostrazione. La commutatività del rettangolo di sinistra è ovvia. Dimostriamo la commutatività del triangolo di destra. Partiamo da un elemento a di $C^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, cioè da una collezione di costanti reali $\{a_{i_0, \dots, i_q}\}$, dove (i_0, \dots, i_q) varia tra tutti i multiindici di lunghezza $q + 1$. $P(\alpha(a))$ è una collezione di 0-catene singolari sugli aperti $\{U_{i_0, \dots, i_q}\}$. Il valore su uno 0-simplesso singolare in $\{U_{i_0, \dots, i_q}\}$, cioè su un punto x di $\{U_{i_0, \dots, i_q}\}$, della corrispondente cocatena è

$$\int_x a_{i_0, \dots, i_q} = a_{i_0, \dots, i_q}.$$

Per contro β associa ad a_{i_0, \dots, i_q} la 0-cocatena singolare su $\{U_{i_0, \dots, i_q}\}$ il cui valore su qualsiasi 0-simplesso è a_{i_0, \dots, i_q} . \square