Spazio duale e rango

Maurizio Cornalba

19/11/2013

Siano V e W spazi vettoriali sul campo K. Indichiamo con $\mathrm{Hom}(V,W)$ l'insieme delle applicazioni lineari da V a W. Su questo insieme possiamo introdurre una operazione di somma e una di moltiplicazione per scalari; se f, g sono elementi di $\mathrm{Hom}(V,W)$ e $a \in K$ si definiscono nuove applicazioni $f+g : V \to W$ e $af : V \to W$ ponendo:

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v)$$
$$(af)(v) = a(f(v))$$

per ogni $v \in V$. Si verifica immediatamente che queste applicazioni sono lineari. Lasciamo al lettore la (semplice) verifica che, con le operazioni di somma e moltiplicazione per scalari appena descritte, $\mathrm{Hom}(V,W)$ è uno spazio vettoriale su K. Supponiamo che V e W siano spazi vettoriali di dimensione finita. Scegliamo una base $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ di V e una base $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_m)$ di W. L'applicazione $f \mapsto M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}(f)$ che associa a ogni omomorfismo $f : V \to W$ la sua matrice rispetto alle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali da $\mathrm{Hom}(V,W)$ allo spazio delle matrici $m \times n$, come si può facilmente verificare.

Lo spazio $\mathrm{Hom}(V,K)$ è chiamato *spazio duale* di V e si indica con V^*. Sia U un sottospazio di V. Poniamo

$$U^\perp = \{f \in V^* : f(v) = 0 \ \forall v \in U\} = \{f \in V^* : U \subset \ker(f)\}$$

Vedremo ora che $U^\perp$ è un sottospazio di V, che chiameremo l'*ortogonale* di U.

Lemma 1. *$U^\perp$ è un sottospazio di V^*. Se V ha dimensione finita*

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp) \tag{1}$$

Dimostrazione. È chiaro che l'applicazione lineare nulla appartiene a $U^\perp$. Inoltre, se $f, g \in U^\perp$ e $a \in K$, allora $(f+g)(v) = f(v) + g(v) = 0$ e $(af)(v) = af(v) = 0$ per ogni $v \in U$. In altre parole, $f+g$ e af appartengono a $U^\perp$. Questo mostra che $U^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V^*. Ora supponiamo che V abbia dimensione finita n. Scegliamo una base $v_1, \dots, v_n$ di V in modo che $v_1, \dots, v_k$ sia una base di U e scegliamo (1) come base di K. La matrice di un elemento $f \in V^*$ rispetto a queste basi è la matrice riga

$$(f(v_1)\ f(v_2)\ \cdots\ f(v_n))$$

È chiaro che $f \in U^\perp$ se e solo se $f(v_1) = f(v_2) = \cdots = f(v_k) = 0$. Quindi le matrici di elementi di $U^\perp$ sono precisamente le matrici riga $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)$ i cui primi k elementi sono nulli. Dunque la dimensione di $U^\perp$ è $n-k$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Quando $U = \{0\}$ il lemma dice in particolare che

$$\dim(V^*) = \dim(V)$$

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita su K. Definiamo *rango* di f e indichiamo con $\mathrm{rk}(f)$ la dimensione dell'immagine di f. In simboli,

$$\mathrm{rk}(f) = \dim(f(V))$$

Sappiamo che

$$\dim(V) = \dim(\ker f) + \mathrm{rk}(f) \tag{2}$$

Lemma 2. *Sia $f : V \to W$ una applicazioni lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita, e sia Z un sottospazio di V. Allora*

$$\dim(f(Z)) \leq \dim(Z)$$

Dimostrazione. Sia $(z_1, \ldots, z_k)$ una base di Z. Allora $(f(z_1), \ldots, f(z_k))$ generano $f(Z)$. Quindi

$$\dim(f(Z)) \leq k = \dim(Z)$$

□

Proposizione 1. *Siano $f : V \to W$ e $g : W \to U$ applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita. Allora*

$$\mathrm{rk}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rk}(f), \mathrm{rk}(g))$$

Dimostrazione. Il rango di $g \circ f$ è la dimensione di $g(f(V))$, che naturalmente è minore o uguale a $\dim(g(W)) = \mathrm{rk}(g)$. D'altra parte il lemma 2 dice in particolare che $\dim(g(f(V))) \leq \dim(f(V)) = \mathrm{rk}(f)$. □

La traduzione della proposizione 1 in termini di matrici è che, se A è una matrice $m \times n$ e B è una matrice $k \times m$, allora

$$\mathrm{rk}(BA) \leq \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))$$

D'ora in poi, salvo esplicito avviso contrario, pensiamo K^n come lo spazio vettoriale delle matrici colonna di lunghezza n a elementi in K. Se A è una matrice $m \times n$ a elementi in K definiamo nucleo e rango di A ponendo

$$\ker(A) = \ker(F)\,, \quad \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(F)$$

dove $F : K^n \to K^m$ è l'applicazione lineare definita da $F(X) = AX$. L'uguaglianza (2) si traduce dunque in

$$n = \dim(\ker A) + \mathrm{rk}(A) \tag{3}$$

Siano $A_1, \ldots, A_n$ le colonne di A. Allora, per ogni

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

si ha che

$$AX = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n$$

Quindi l'immagine di F è semplicemente il sottospazio di K^m generato dalle colonne di A, e il rango di A è la dimensione di questo sottospazio o, che è lo stesso, il massimo numero di colonne indipendenti di A.

Teorema 1. $\mathrm{rk}({}^tA) = \mathrm{rk}(A)$.

Dato che l'operazione di trasposizione scambia righe con colonne, il teorema dice che il massimo numero di **colonne** indipendenti di A è uguale al massimo numero di **righe** indipendenti di A.

Dimostrazione. Basta mostrare che

$$\mathrm{rk}({}^tA) \leq \mathrm{rk}(A) \tag{4}$$

per ogni matrice A. In effetti, rimpiazzando A con ${}^tA$ in questa disuguaglianza e ricordando che ${}^t({}^tA) = A$ si ricava che $\mathrm{rk}(A) \leq \mathrm{rk}({}^tA)$. Combinando la formula (3) con la formula (1) applicata a $U = \ker A$ si ottiene che

$$\mathrm{rk}(A) = \dim((\ker A)^\perp)$$

Dobbiamo quindi mostrare che $\mathrm{rk}({}^tA) \leq \dim((\ker A)^\perp)$, cioè che il numero di righe indipendenti di A non supera la dimensione di $(\ker A)^\perp$. Sia $R \cong K^n$ lo spazio vettoriale delle matrici riga di lunghezza n. Ad ogni elemento B di R associamo l'applicazione lineare $\lambda_B : K^n \to K$ definita da

$$\lambda_B(S) = BS$$

dove il prodotto è quello di matrici. Le proprietà di associatività e di distributività rispetto alla somma del prodotto di matrici dicono che l'applicazione $R \to (K^n)^*$ definita da $B \mapsto \lambda_B$ è lineare. Questa applicazione è anche iniettiva. Infatti, se $\lambda_B = 0$, cioè se $BS = 0$ per ogni S, allora in particolare $Be_i = 0$ per ogni i, dove e_i è l'i-esimo elemento della base standard di K^n. Però, se $B = (b_1\ b_2\ \dots\ b_n)$, il prodotto Be_i vale b_i, e si conclude che $B = 0$. Dato che R e $(K^n)^*$ hanno entrambi dimensione n, in effetti l'applicazione $B \mapsto \lambda_B$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. Ora scriviamo

$$A = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ B_m \end{pmatrix}$$

dove $B_1, B_2, \dots$ sono le righe di A, e notiamo che

$$AX = \begin{pmatrix} B_1X \\ B_2X \\ \cdot \\ \cdot \\ B_mX \end{pmatrix}$$

Ne segue in particolare che $\lambda_{B_i}(X) = B_iX = 0$ per ogni i e per ogni $X \in \ker A$. In altre parole, $\lambda_{B_i} \in (\ker A)^\perp$ per ogni i. Per l'iniettività di $B \mapsto \lambda_B$ ne segue che $\mathrm{rk}({}^tA) \leq \dim(\ker A)^\perp$, come si voleva. □