Moltiplicazione a blocchi di matrici

Maurizio Cornalba

7/12/2013

Siano A una matrice $m \times n$ e B una matrice $n \times \ell$. Scriviamo A e B come "matrici di matrici" o, come si dice, in forma *a blocchi*

$$(1) \qquad A = \begin{pmatrix} A_{1\,1} & A_{1\,2} & \dots & A_{1\,r} \\ A_{2\,1} & \dots & & \\ & \dots & \dots & \\ A_{s\,1} & A_{s\,2} & \dots & A_{s\,r} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{1\,1} & B_{1\,2} & \dots & B_{1\,u} \\ B_{2\,1} & \dots & & \\ & \dots & \dots & \\ B_{r\,1} & B_{s\,2} & \dots & B_{r\,u} \end{pmatrix}$$

dove $A_{i\,j}$ è una sottomatrice $m_i \times n_j$ di A e $B_{i\,j}$ una sottomatrice $n_i \times \ell_j$ di B. Indichiamo con C la matrice prodotto AB.

Lemma 1.

$$C = \begin{pmatrix} C_{1\,1} & C_{1\,2} & \dots & C_{1\,u} \\ C_{2\,1} & \dots & & \\ & \dots & \dots & \\ C_{s\,1} & C_{s\,2} & \dots & C_{s\,u} \end{pmatrix}$$

dove

$$C_{i\,j} = \sum_h A_{i\,h} B_{h\,j}$$

Il lemma afferma, in sostanza, che il prodotto di A e B si può calcolare effettuando la moltiplicazione righe per colonne delle matrici stesse nella loro forma a blocchi (1).

Dimostrazione. L'elemento di posto i, j di C è

$$c_{ij} = A_i B_j$$

dove A_i è la i-esima *riga* di A e B_j è la j-esima *colonna* di B. Ora, $i = m_1 + \cdots + m_{a-1} + p$ per qualche a e qualche $p \leq m_a$, e analogamente $j = \ell_1 + \cdots + \ell_{b-1} + q$ per qualche b e qualche $q \leq \ell_b$. Allora c_{ij} è l'elemento di posto p, q di $C_{a\,b}$. Inoltre

$$A_i = \big((A_{a\,1})_p \quad (A_{a\,2})_p \quad \dots \quad (A_{a\,r})_p \big)$$

e

$$B_j = \begin{pmatrix} (B_{1\,b})_q \\ (B_{2\,b})_q \\ \dots \\ (B_{r\,b})_q \end{pmatrix}$$

dove $(A_{d\,e})_f$ indica la f-esima *riga* di $A_{d\,e}$ e $(B_{d\,e})_f$ la f-esima *colonna* di $B_{d\,e}$. È allora chiaro che

$$c_{ij} = \sum_h (A_{a\,h})_p (B_{h\,b})_q$$

che è l'elemento di posto p, q di $\sum_h A_{a\,h} B_{h\,b}$. $\square$

In certi casi scrivere una matrice quadrata in forma a blocchi può facilitare il calcolo del suo determinante. Supponiamo che la matrice A sia della forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & A_3 & & \\ 0 & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_h \end{pmatrix}$$

dove $A_1, \dots, A_h$ sono blocchi quadrati situati lungo la diagonale principale. In questo caso diremo a volte che A è *triangolare superiore a blocchi*; analogamente si può parlare di matrici triangolari inferiori a blocchi.

Lemma 2. $\det(A) = \prod_{i=1}^{h} \det(A_i)$.

Dimostrazione. Basta trattare il caso $h = 2$; il caso generale si ottiene immediatamente da questo per induzione. Supponiamo quindi che

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

dove B e C sono matrici quadrate, e mostriamo che $\det(A) = \det(B)\det(C)$. Indichiamo con a_{ij} l'elemento di posto i, j di A e con b_{ij} l'elemento di posto i, j di B. Sia n la dimensione di B. Procediamo per induzione sulla dimensione di A. Se questa è 2 l'asserto è ovviamente vero. Se la dimensione è maggiore di 2 esprimiamo il determinante di A usando lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima colonna, che dà

$$\det(A) = \sum (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) = \sum_{i \le n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) = \sum_{i \le n} (-1)^{i+1} b_{i1} \det(A_{i1})$$

dato che $a_{i1} = 0$ per $i > n$. La matrice A_{ij} è ottenuta da A rimuovendo la riga i-esima e la colonna j-esima e quindi, per $i \le n$,

$$A_{i1} = \begin{pmatrix} B_{i1} & D_i \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

dove D_i è ottenuta da D rimuovendo la i-esima riga. Per ipotesi induttiva $\det(A_{i1}) = \det(B_{i1})\det(C)$ e quindi

$$\det(A) = \sum_{i \le n} (-1)^{i+1} b_{i1} \det(A_{i1}) = \sum_{i \le n} (-1)^{i+1} b_{i1} \det(B_{i1}) \det(C) = \det(B)\det(C)$$

$\square$