

**Lezioni sulle superficie di Riemann e i tori
complessi**

Maurizio Cornalba

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DI PAVIA, VIA FERRATA 5,
27100 PAVIA, ITALIA

Indice

Prefazione	vii
Capitolo 1. Preliminari	1
1.1. Forme differenziali su una varietà complessa	2
1.2. Fibrati vettoriali	4
Parte 1. I teoremi di Riemann-Roch e di Abel	7
Capitolo 2. Differenziali abeliani	9
Capitolo 3. I teoremi di Riemann-Roch e di dualità	17
3.1. Il fibrato in rette associato a un divisore	17
3.2. L'isomorfismo di Dolbeault	19
3.3. Il teorema di Riemann-Roch	20
3.4. Il teorema di dualità	21
Capitolo 4. Applicazioni del teorema di Riemann-Roch	25
4.1. L'applicazione canonica	26
4.2. La formula di Riemann-Hurwitz	28
4.3. Ogni superficie di Riemann compatta è algebrica	29
4.4. Una versione geometrica del teorema di Riemann-Roch	30
Capitolo 5. Il teorema di Abel	33
Capitolo 6. L'operatore di Laplace sulle superficie di Riemann	39
6.1. Il principio del massimo per le funzioni armoniche	39
6.2. Una dimostrazione del teorema 2.5	40
6.3. La finitezza di $h^1(L)$	44
Parte 2. Tori complessi	47
Capitolo 7. Generalità sui tori complessi	49
7.1. Coomologia dei tori complessi	50
Capitolo 8. Fibrati in rette sui tori complessi	55
Capitolo 9. Il teorema di Riemann-Roch per i tori complessi	61
9.1. Immersioni proiettive	68
Capitolo 10. Funzioni meromorfe	71
Capitolo 11. Geometria del divisore theta	77

Bibliografia	87
Indice analitico	89

Prefazione

Il punto di vista adottato nella prima parte di queste note è in un certo senso intermedio tra quello classico dei libri di Weyl [13], Siegel [8, 9, 10], Springer [11], Farkas e Kra [2], e quello più moderno di Gunning [4]. In questa prima parte non si fa uso del linguaggio dei fasci e della loro coomologia, che invece vengono usati nella seconda parte.

Lo studio delle superficie di Riemann compatte come varietà algebriche è sviluppato più a fondo nei libri di Griffiths e Harris [3] e di Arbarello, Cornalba, Griffiths e Harris [1].

Il trattamento dei tori complessi è ispirato a quello di Mumford in [7], e quello del teorema di singolarità di Riemann è tratto da Lewittes [6].

Maurizio Cornalba

Preliminari

La nozione di varietà complessa è del tutto analoga a quella di varietà differenziabile; la sola differenza è che si richiede che i cambiamenti di coordinate siano olomorfi. Formalmente, sia X uno spazio topologico; un *atlante olomorfo* su X è una famiglia di omeomorfismi $\Phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, dove gli U_α costituiscono un ricoprimento aperto di X , ogni V_α è aperto in \mathbb{C}^n per qualche n e, per ogni scelta di α e β , la composizione dell'inversa di Φ_α e di Φ_β è olomorfa dove definita. Due atlanti olomorfi si dicono equivalenti se la loro unione è un atlante olomorfo. Una *struttura complessa* su X è una classe di equivalenza di atlanti olomorfi per X . Una *varietà complessa* è il dato di uno spazio topologico di Hausdorff e a base numerabile e di una struttura complessa su di esso. Gli omeomorfismi Φ_α vengono chiamati *carte locali (olomorfe)* o *sistemi di coordinate locali (olomorfe)*, le loro componenti *coordinate locali (olomorfe)* e gli aperti U_α *aperti coordinati*. Diremo che un sistema di coordinate Φ_α è *centrato* in un punto x di X se $\Phi_\alpha(x)$ è l'origine in \mathbb{C}^n . Una applicazione $f : X \rightarrow Y$ tra varietà complesse si dice *olomorfa* se $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$ è olomorfa, dove definita, per ogni carta locale Ψ su Y e ogni carta locale Φ su X . In questo caso diremo anche che f è un *morfismo* di varietà complesse.

Sia X una varietà complessa e sia Φ una carta locale per X . È chiaro che Φ può anche essere vista come carta locale a valori in \mathbb{R}^{2n} e che i cambiamenti di coordinate tra carte locali per X , in quanto olomorfi, sono anche C^∞ . Dunque X possiede una struttura di varietà differenziabile soggiacente alla (o ereditata dalla) struttura complessa. Se x è un punto di X , quest'ultima, in quanto varietà differenziabile, ha una dimensione ben definita in x , alla quale faremo riferimento come la *dimensione reale* di X in x , che è ovviamente un numero pari. È naturale definire la *dimensione complessa* di X in x come la metà della dimensione reale. Se la dimensione di X in un suo punto x è costante come funzione di x diremo che X *ha una dimensione*. In questo caso (in particolare, quindi, quando X è connessa) indicheremo la dimensione reale di X con $\dim_{\mathbb{R}}(X)$ e quella complessa con $\dim_{\mathbb{C}}(X)$. Nel seguito, quando parleremo di dimensione di una varietà complessa, senza ulteriori specifiche, sarà sottinteso che ci riferiamo alla dimensione complessa. Una *superficie di Riemann* non è altro che una varietà complessa di dimensione 1.

Ricordiamo che le funzioni olomorfe soddisfano il principio del massimo. Questo afferma che, se X è una varietà complessa, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa e $|f|$ ha un massimo locale in un punto $x \in X$, allora f è costante su un intorno di x . Ne segue che, quando X è compatta e connessa, ogni funzione olomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ è necessariamente costante. Infatti in questo caso $|f|$ ha un massimo in un punto $x \in X$, e il luogo dei punti y in cui $f(y) = f(x)$ è chiuso e aperto per il principio del massimo; poiché non è vuoto coincide con X .

1.1. Forme differenziali su una varietà complessa

Siano z_1, \dots, z_n coordinate locali sulla varietà complessa X . Possiamo scrivere $z_j = x_j + \sqrt{-1}y_j$, dove x_j e y_j sono la parte reale e immaginaria di z_j . Le funzioni x_i e y_i costituiscono un sistema di coordinate locali per la varietà differenziabile soggiacente a X . Se f è una funzione C^1 a valori complessi su un aperto di X si pone

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sqrt{-1} \frac{\partial f}{\partial y_j} \right], \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sqrt{-1} \frac{\partial f}{\partial y_j} \right],$$

cosicché il differenziale di f non è altro che

$$df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \sum_j \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j,$$

dove si è posto

$$dz_j = dx_j + \sqrt{-1}dy_j, \quad d\bar{z}_j = dx_j - \sqrt{-1}dy_j.$$

La funzione f è olomorfa se e solo se soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann, cioè se e solo se

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Sia ora w_1, \dots, w_n un altro sistema di coordinate. Le w_i sono funzioni olomorfe delle z_i , e quindi le derivate parziali $\partial w_j / \partial \bar{z}_h$ sono nulle per ogni scelta degli indici j e h , e lo stesso è vero per le $\partial z_j / \partial \bar{w}_h$ e per i rispettivi coniugati $\partial \bar{w}_j / \partial z_h$ e $\partial \bar{z}_j / \partial w_h$. La regola di derivazione delle funzioni composte ci dice allora che

$$dz_j = \sum_k \frac{\partial z_j}{\partial w_k} dw_k + \sum_k \frac{\partial z_j}{\partial \bar{w}_k} d\bar{w}_k = \sum_k \frac{\partial z_j}{\partial w_k} dw_k,$$

e anche che

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j &= \sum_{j,h,k} \frac{\partial f}{\partial w_h} \frac{\partial w_h}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial w_k} dw_k + \sum_{j,h,k} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}_h} \frac{\partial \bar{w}_h}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial w_k} dw_k \\ &= \sum_{j,h,k} \frac{\partial f}{\partial w_h} \frac{\partial w_h}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial w_k} dw_k \\ &= \sum_k \frac{\partial f}{\partial w_k} dw_k. \end{aligned}$$

I differenziali

$$\partial f = \sum_j \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j, \quad \bar{\partial} f = \sum_j \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$$

sono dunque definiti in modo intrinseco, e

$$df = \partial f + \bar{\partial} f.$$

Notiamo che le equazioni di Cauchy-Riemann per f possono essere riscritte in modo indipendente dalle coordinate sotto la forma $\bar{\partial} f = 0$.

Per ogni multiindice $I = (i_1, \dots, i_p)$ porremo $|I| = p$ e

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}, \quad d\bar{z}_I = d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_p}.$$

Diremo che una forma differenziale φ su un aperto di X ha *tipo* (p, q) se è combinazione lineare, a coefficienti funzioni, di differenziali del tipo $dz_P \wedge d\bar{z}_Q$, dove $|P| = p$ e $|Q| = q$. Il fatto che, se w_1, \dots, w_n è un altro sistema di coordinate, le

derivate parziali $\partial z_j / \partial \bar{w}_h$ siano nulle, ci assicura che questa nozione non dipende dalla scelta delle coordinate. È chiaro che ogni n -forma si scrive, in modo unico, come somma di forme di tipo (p, q) , al variare di p e q tra quelle coppie di interi non negativi la cui somma è n . Per ogni forma

$$\varphi = \sum_{I,J} a_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

si pone

$$\begin{aligned} \partial\varphi &= \sum_{I,J} \partial a_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J = \sum_{k,I,J} \frac{\partial a_{I,J}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J, \\ \bar{\partial}\varphi &= \sum_{I,J} \bar{\partial} a_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J = \sum_{k,I,J} \frac{\partial a_{I,J}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J, \end{aligned}$$

ed è chiaro che

$$d\varphi = \partial\varphi + \bar{\partial}\varphi.$$

È chiaro anche che ∂ e $\bar{\partial}$ portano forme di tipo (p, q) in forme di tipo $(p+1, q)$ e $(p, q+1)$, rispettivamente. Segue inoltre dal fatto che $d^2 = 0$ che gli operatori ∂ e $\bar{\partial}$ hanno quadrato nullo e che $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$. Diremo che una $(p, 0)$ -forma è *olomorfa* se $\bar{\partial}\varphi = 0$ o, equivalentemente, se per ogni sua espressione locale $\sum_{|I|=p} a_I dz_I$ tutte le funzioni a_I sono olomorfe.

Si può dare una nozione di tipo anche per vettori tangenti a X . Sia p un punto di X e siano z_1, \dots, z_n coordinate locali su un aperto contenente p . Come sopra, scriviamo $z_j = x_j + \sqrt{-1}y_j$, dove x_j e y_j sono reali. Sia T lo spazio tangente nel punto p alla varietà differenziabile soggiacente a X , e sia $T \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ il suo complessificato; gli elementi di questo spazio sono le combinazioni lineari a coefficienti complessi dei vettori tangenti $\partial/\partial x_j$ e $\partial/\partial y_j$, $j = 1, \dots, n$. Diremo che un elemento di $T \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ è di tipo $(1, 0)$ se è combinazione lineare dei vettori

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y_i} \right], \quad i = 1, \dots, n,$$

e che è di tipo $(0, 1)$ se è combinazione lineare dei vettori

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y_i} \right], \quad i = 1, \dots, n.$$

Ogni elemento $v \in T \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ si scrive in modo unico come somma

$$v = v^{(1,0)} + v^{(0,1)},$$

dove $v^{(1,0)}$ è di tipo $(1, 0)$ e $v^{(0,1)}$ di tipo $(0, 1)$. La nozione di tipo è indipendente dalla scelta delle coordinate. Infatti, se w_1, \dots, w_n è un altro sistema di coordinate locali su X ,

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \sum_h \frac{\partial w_h}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial w_h}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \sum_h \frac{\partial \bar{w}_h}{\partial \bar{z}_i} \frac{\partial}{\partial \bar{w}_h},$$

dato che le w_h sono funzioni olomorfe delle z_i . Lo spazio dei vettori tangenti di tipo $(1, 0)$ in p viene detto *spazio tangente (olomorfo)* a X in p e indicato con il simbolo $T_{X,p}$. I suoi elementi saranno detti *vettori tangenti (olomorfi)* a X in p .

Sia X una varietà complessa e siano z_1, \dots, z_n e w_1, \dots, w_n due sistemi di coordinate su X . Scriviamo $z_j = x_j + \sqrt{-1}y_j$, $w_j = t_j + \sqrt{-1}s_j$, dove x_j, y_j, t_j, s_j

sono reali. Notiamo che

$$dz_j \wedge d\bar{z}_j = -2\sqrt{-1}dx_j \wedge dy_j$$

e che

$$\bigwedge_j dz_j = D \bigwedge_j dw_j,$$

dove D è il determinante Jacobiano complesso $\det(\partial z_i/\partial w_j)$. Dunque

$$\begin{aligned} \bigwedge_j (dx_j \wedge dy_j) &= \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \bigwedge_j (dz_j \wedge d\bar{z}_j) \\ &= \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \bigwedge_j dz_j \wedge \bigwedge_j d\bar{z}_j \\ &= |D|^2 \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \bigwedge_j dw_j \wedge \bigwedge_j d\bar{w}_j \\ &= |D|^2 \bigwedge_j (dt_j \wedge ds_j). \end{aligned}$$

Il determinante Jacobiano del passaggio dal sistema di coordinate reali $s_1, t_1, \dots, s_n, t_n$ al sistema di coordinate reali $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ è dunque $|D|^2$; in particolare, è positivo. Quindi X , come varietà differenziabile, è orientabile. Come orientazione su X sceglieremo sempre quella rispetto alla quale la forma $\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \bigwedge_j (dz_j \wedge d\bar{z}_j)$ è positiva.

1.2. Fibrati vettoriali

Sia X una varietà complessa. Un *fibrato vettoriale olomorfo* (o semplicemente, quando non c'è rischio di confusione, fibrato vettoriale) su X è il dato di un morfismo di varietà complesse $\pi : F \rightarrow X$ più una struttura di spazio vettoriale complesso di dimensione finita su ogni fibra $\pi^{-1}(x)$, $x \in X$, soddisfacente la seguente condizione di uniformità: per ogni $x \in X$ vi sono un intorno U e un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\eta} & U \times \mathbb{C}^r \\ & \searrow & \swarrow \\ & U & \end{array}$$

dove η è un isomorfismo di varietà complesse che induce, per ogni $x \in U$, un isomorfismo di spazi vettoriali tra $\pi^{-1}(x)$ e $\{x\} \times \mathbb{C}^r$. Diremo che η è una *banalizzazione locale* per $\pi : F \rightarrow X$. L'intero r si dice *rango* di $F \rightarrow X$ nel punto x . Il rango è una funzione localmente costante su X ; in particolare, è costante quando X è connessa. D'ora in poi considereremo solo fibrati vettoriali di rango costante, e parleremo di rango di $F \rightarrow X$, senza ulteriori specificazioni. Un fibrato vettoriale di rango 1 sarà detto *fibrato in rette*. Un *isomorfismo* tra due fibrati vettoriali $F \rightarrow X$ e $E \rightarrow X$ non è altro che un isomorfismo tra le varietà complesse F ed E che è compatibile con le proiezioni su X e lineare su ogni fibra. Un fibrato vettoriale viene detto *banale* se è isomorfo a un fibrato prodotto $X \times \mathbb{C}^r$.

Sia $\pi : F \rightarrow X$ un fibrato vettoriale sulla varietà complessa X . Possiamo trovare banalizzazioni locali $\eta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ tali che gli U_α formino un ricoprimento aperto di X . Per ogni α indichiamo con ζ_α la seconda componente

di η_α ; si tratta dunque di una funzione definita su $\pi^{-1}(U_\alpha)$, a valori in \mathbb{C}^r . Di norma penseremo ζ_α come un vettore colonna. A volte diremo che le ζ_α , o le loro componenti, sono *coordinate di fibra* per F rispetto al ricoprimento $\{U_\alpha\}$. Sull'intersezione $U_\alpha \cap U_\beta$ le ζ_α sono legate da

$$\zeta_\alpha = g_{\alpha\beta}\zeta_\beta,$$

dove $g_{\alpha\beta}$ è una funzione olomorfa su $U_\alpha \cap U_\beta$ a valori matrici invertibili $r \times r$. Diremo che le funzioni $g_{\alpha\beta}$ sono un sistema di *funzioni di transizione* per F rispetto al ricoprimento $\{U_\alpha\}$. Le $g_{\alpha\beta}$ soddisfano la condizione di cociclo

$$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} \quad \text{su } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

Viceversa, date funzioni soddisfacenti questa condizione, si può costruire un fibrato vettoriale E su X ponendo

$$E = \coprod_{\alpha} U_\alpha \times \mathbb{C}^r / \sim,$$

dove

$$U_\alpha \times \mathbb{C}^r \ni (x, \zeta_\alpha) \sim (x, \zeta_\beta) \in U_\beta \times \mathbb{C}^r \quad \text{se } \zeta_\alpha = g_{\alpha\beta}\zeta_\beta.$$

È immediato verificare che le $g_{\alpha\beta}$ sono funzioni di transizione per E . Diremo che due sistemi di funzioni di transizione sono *equivalenti* se corrispondono a fibrati vettoriali isomorfi.

È semplice esprimere la nozione di isomorfismo tra fibrati vettoriali in termini di funzioni di transizione. Siano $\pi : F \rightarrow X$ e $\rho : E \rightarrow X$ fibrati vettoriali, e sia $\varphi : F \rightarrow E$ un isomorfismo. Scegliamo sistemi di coordinate di fibra $\{\zeta_\alpha\}$ per F e $\{\xi_\gamma\}$ per E , rispetto a ricoprimenti aperti $\{U_\alpha\}$ e $\{V_\gamma\}$; indichiamo con $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{f_{\gamma\delta}\}$ i corrispondenti sistemi di funzioni di transizione. Poiché φ è lineare lungo ogni fibra si può scrivere, su ogni intersezione $\pi^{-1}(U_\alpha \cap V_\gamma)$,

$$(1.1) \quad \xi_\gamma(\varphi(x)) = u_{\gamma\alpha}(\pi(x))\zeta_\alpha(x),$$

dove $u_{\gamma\alpha}$ è una funzione olomorfa su $U_\alpha \cap V_\gamma$ a valori matrici; inoltre $u_{\gamma\alpha}$ è invertibile ovunque dato che φ ammette una inversa. Le funzioni $u_{\gamma\alpha}$ soddisfano le condizioni di compatibilità

$$(1.2) \quad u_{\gamma\alpha}g_{\alpha\beta} = f_{\gamma\delta}u_{\delta\beta} \quad \text{su } U_\alpha \cap U_\beta \cap V_\gamma \cap V_\delta.$$

Viceversa un sistema di funzioni olomorfe $\{u_{\gamma\alpha}\}$ a valori matrici invertibili soddisfacente queste condizioni di compatibilità definisce, tramite la 1.1, un isomorfismo tra F e E . In particolare, due sistemi di funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{f_{\gamma\delta}\}$ sono equivalenti se e solo se vi sono funzioni olomorfe $\{u_{\gamma\alpha}\}$ a valori matrici invertibili per cui valgano le 1.2.

Sia $\pi : F \rightarrow X$ un fibrato vettoriale sulla varietà complessa X , e sia V un aperto di X . Una *sezione* di F su V è una applicazione $s : V \rightarrow F$ tale che $\pi \circ s$ sia l'identità su V . Se s è olomorfa (oppure continua, oppure differenziabile) come applicazione da V a F diremo che s è una sezione olomorfa (oppure continua, oppure differenziabile). Consideriamo ora banalizzazioni locali $\eta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ per F tali che gli U_α ricoprano X . Per ogni α indichiamo con s_α la seconda componente della composizione $\eta_\alpha \circ s|_{V \cap U_\alpha}$; se s è una sezione olomorfa (oppure continua, o differenziabile) si tratta di un vettore colonna di funzioni olomorfe (oppure continue, o differenziabili) su $V \cap U_\alpha$. Queste funzioni soddisfano le condizioni di compatibilità

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta}s_\beta \quad \text{su } V \cap U_\alpha \cap U_\beta.$$

Viceversa, funzioni soddisfacenti questa condizione definiscono una sezione di F su V . Nel seguito, quando parleremo di sezioni di F , senza ulteriori precisazioni, intenderemo sezioni olomorfe. Le sezioni olomorfe (o differenziabili, o continue) di F si possono sommare tra loro o moltiplicare per funzioni olomorfe (o differenziabili, o continue); i risultati di queste operazioni sono ancora sezioni olomorfe (o differenziabili, o continue) di F .

Molte delle costruzioni standard per spazi vettoriali si generalizzano ai fibrati vettoriali. Ad esempio, i fibrati vettoriali si possono tensorizzare tra loro. Se F ed E sono fibrati di ranghi r e r' dati da funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$ e $f_{\alpha\beta}$ rispetto a uno stesso ricoprimento (ci si può sempre ridurre a questa situazione raffinando i ricoprimenti originali), allora il prodotto tensoriale $F \otimes E$ è il fibrato di rango rr' le cui funzioni di transizione sono le $g_{\alpha\beta} \otimes f_{\alpha\beta}$. Una sezione di F può essere moltiplicata per una sezione di E , e il risultato è una sezione di $F \otimes E$. Il duale di F è il fibrato vettoriale F^\vee con funzioni di transizione ${}^t g_{\alpha\beta}^{-1}$. Un'altra costruzione possibile è quella di potenza esterna. La potenza esterna p -esima di F , scritta $\wedge^p F$, ha come funzioni di transizione le matrici $\wedge^p g_{\alpha\beta}$. Quando L ed M sono fibrati in rette, anche $L \otimes M$ è un fibrato in rette, che di norma verrà indicato con LM . Il duale di un fibrato in rette L verrà di norma indicato con L^{-1} invece che con L^\vee ; è chiaro che il prodotto di L con L^{-1} è banale.

Uno degli esempi basilari di fibrato vettoriale su una varietà complessa X è dato dal *fibrato tangente olomorfo* T_X . I punti di questo fibrato sono i vettori tangenti (olomorfi) a X , e la mappa $T_X \rightarrow X$ associa ad ogni vettore il punto di applicazione. Scegliamo un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di X per mezzo di aperti coordinati, e indichiamo le coordinate su U_α con $z_\alpha^1, \dots, z_\alpha^n$. Le funzioni di transizione per T_X rispetto a un tale ricoprimento sono le matrici $n \times n$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_\alpha^i}{\partial z_\beta^j} \end{pmatrix}.$$

Il fibrato duale T_X^\vee viene chiamato *fibrato cotangente olomorfo* di X . Le sezioni (C^∞ o olomorfe) di $\wedge^p T_X^\vee$ non sono altro che le forme (C^∞ o olomorfe) di tipo $(p, 0)$ su X . Il fibrato $\wedge^{\dim X} T_X^\vee$ è un fibrato in rette, che viene chiamato *fibrato canonico* di X , e indicato di norma con il simbolo K_X .

Il *fascio strutturale* \mathcal{O}_X di una varietà complessa X è il fascio di anelli locali definito come segue: per ogni aperto V , $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ è l'anello delle funzioni olomorfe su V mentre, se W è un altro aperto contenuto in V , l'operatore di restrizione $\Gamma(V, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(W, \mathcal{O}_X)$ non è altro che la restrizione di funzioni. A ogni fibrato vettoriale F su X è associato un fascio di \mathcal{O}_X -moduli $\mathcal{O}(F)$; per ogni aperto V , $\Gamma(V, \mathcal{O}(F))$ è l'insieme di tutte le sezioni di F su V , mentre gli operatori di restrizione sono quelli ovvi. Ad esempio, il fascio associato al fibrato banale $X \times \mathbb{C}$ è il fascio strutturale \mathcal{O}_X . Spesso confonderemo, quando ciò non presenta rischi, fibrati vettoriali e fasci ad essi associati. Il fascio delle sezioni olomorfe di $\wedge^p T_X^\vee$ si indica di norma con il simbolo Ω_X^p .

PROIEZIONI DA UN PUNTO, SCOPPIAMENTI

Parte 1

I teoremi di Riemann-Roch e di
Abel

Differenziali abeliani

Sia C una superficie di Riemann connessa e compatta. Dal punto di vista topologico, C è una superficie compatta, connessa e orientabile. È ben noto che una tale superficie non è altro che una sfera con attaccati un numero finito di manici.

Il numero di manici è il *genere* di C ; dunque qui sopra è raffigurata una superficie di Riemann di genere 4.

Un *differenziale olomorfo* su un aperto di una superficie di Riemann C è una $(1, 0)$ -forma α tale che $\bar{\partial}\alpha = 0$; in altri termini se scriviamo, localmente, $\alpha = a(z)dz$, la funzione a deve essere olomorfa. Se invece permettiamo alle funzioni $a(z)$ di avere dei poli parleremo di *differenziale meromorfo*. Un differenziale olomorfo su un aperto di C non è dunque altro che una sezione del fibrato canonico K_C . Quando C è compatta e connessa, i differenziali olomorfi su tutta la superficie C vengono anche chiamati *differenziali abeliani*. Cerchiamo di determinarli in alcuni esempi specifici di superficie di Riemann.

ESEMPIO 2.1 (La sfera di Riemann). La sfera di Riemann si ottiene a partire dall'unione disgiunta di due copie di \mathbb{C} , con coordinate lineari z e w , tramite l'identificazione $w = 1/z$, per ogni valore non nullo di z . Se α è un differenziale abeliano possiamo scriverlo nella coordinata z , sotto la forma $\alpha = a(z)dz$, dove

$$a(z) = \sum_{i \geq 0} c_i z^i;$$

Allora, nella coordinata w , si ha che

$$\alpha = \sum_{i \geq 0} c_i w^{-i} d(1/w) = \sum_{i \geq 0} c_i w^{-i-2} dw.$$

Dunque α non è olomorfa per $w = 0$ a meno che non sia identicamente nulla. In altre parole, in questo caso lo spazio vettoriale dei differenziali abeliani ha dimensione nulla.

ESEMPIO 2.2 (Superficie di Riemann ellittiche). Una superficie di Riemann ellittica è un quoziente $\mathbb{C}/\Lambda = C$, dove Λ è un reticolo in \mathbb{C} , cioè un sottogruppo discreto di rango 2. Se z è una coordinata lineare in \mathbb{C} , il differenziale dz è invariante per traslazione, quindi discende a un differenziale abeliano su C , che indicheremo con lo stesso simbolo. Si noti che dz non si annulla mai; dunque, se α è un altro differenziale abeliano, α/dz è una funzione olomorfa su C , e quindi è costante. Ciò mostra che, per una superficie di Riemann ellittica, lo spazio dei differenziali abeliani ha dimensione uno; inoltre un differenziale abeliano non nullo non si annulla mai.

Prima di passare al prossimo esempio, facciamo alcune osservazioni di carattere generale. Ricordiamo innanzitutto il teorema dei residui. Se α è un differenziale meromorfo con rappresentazione locale $a(z)dz$, dove z è una coordinata locale centrata in un punto p , e

$$(2.1) \quad a(z) = \cdots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots$$

è lo sviluppo di Laurent di $a(z)$ in termini di z , allora il residuo di α nel punto p è

$$\operatorname{res}_p \alpha = a_{-1}.$$

Che questa sia una buona definizione può essere verificato direttamente, oppure osservando che

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Gamma} \alpha,$$

dove Γ è un piccolo cammino semplice chiuso intorno a p percorso in verso antiorario, come segue dallo sviluppo 2.1.

TEOREMA 2.3 (dei residui). *Sia α un differenziale meromorfo su una superficie di Riemann compatta C . Allora*

$$\sum_{p \in C} \operatorname{res}_p \alpha = 0.$$

Naturalmente la somma che appare nell'enunciato è in realtà una somma finita, dato che $\operatorname{res}_p \alpha$ può essere diverso da zero solo quando p è uno dei poli di α , e questi sono in numero finito. La dimostrazione del teorema dei residui è una semplice applicazione della formula di Stokes. Indichiamo con D_1, \dots, D_h piccoli dischi centrati nei poli p_1, \dots, p_h di α . Allora

$$2\pi\sqrt{-1} \sum_{p \in C} \operatorname{res}_p \alpha = 2\pi\sqrt{-1} \sum_{i=1}^h \operatorname{res}_{p_i} \alpha = \sum_i \int_{\partial D_i} \alpha = - \int_{C \setminus \cup D_i} d\alpha = 0.$$

Un corollario utile del teorema dei residui si ottiene applicando questo al differenziale logaritmico $d \log f = \frac{df}{f}$ di una funzione meromorfa su C . Si verifica immediatamente che il residuo di $d \log f$ in un punto p è pari all'ordine di annullamento di f in p se in questo punto f non ha un polo; se invece f ha in p un polo di ordine n , il residuo vale $-n$. Segue dal teorema dei residui che il numero dei poli di f , contati tante volte quant'è il loro ordine (o, come si dice, la loro *molteplicità*), è pari al numero degli zeri, contati anche questi secondo la loro molteplicità.

In particolare, se φ e ψ sono differenziali abeliani su C , allora φ e ψ hanno lo stesso numero di zeri, come si vede applicando queste considerazioni alla funzione meromorfa φ/ψ . Infatti i poli di φ/ψ vengono da zeri di ψ , e i suoi zeri da zeri di φ .

ESEMPIO 2.4 (Superficie di Riemann iperellittiche). Consideriamo il luogo Z in \mathbb{C}^2 definito dall'equazione

$$x^2 = F(y),$$

dove F è un polinomio monico di grado $2n$ con radici *distinte*. Dunque

$$F(y) = \prod_{1 \leq i \leq 2n} (y - \zeta_i), \quad \zeta_i \neq \zeta_j \text{ se } i \neq j.$$

Notiamo innanzitutto che Z è liscio. Infatti la derivata di $x^2 - F(y)$ rispetto a x si annulla su Z solo in corrispondenza degli zeri di F , dove la derivata rispetto a y

non si annulla. Dunque, per il teorema delle funzioni implicite, possiamo scegliere y come coordinata locale su Z lontano dalle radici di F , e x come coordinata locale vicino alle radici di F . Per fissare le idee, lavoreremo con

$$F(y) = y^6 - 1,$$

ma la discussione sarà valida in generale. Raggruppiamo le radici di F a due a due e uniamo i due elementi di ogni coppia con un segmento (in generale, con un cammino)

La funzione $(y - \zeta_i)(y - \zeta_{i+1})$ ha due radici quadrate olomorfe sul complementare del segmento $\zeta_i \zeta_{i+1}$; chiamiamo una di queste f_i , e poniamo

$$f = f_1 f_3 f_5.$$

Ora tagliamo il piano delle y lungo i segmenti $\zeta_1 \zeta_2$, $\zeta_3 \zeta_4$, $\zeta_5 \zeta_6$. La parte di Z che giace sopra la parte rimanente del piano delle y è l'unione disgiunta di due copie del piano tagliato, cioè dei due fogli di equazioni

$$x = f(y), \quad x = -f(y).$$

Il piano delle y può essere compattificato aggiungendo un punto all'infinito; il risultato è la sfera di Riemann. Allo stesso modo aggiungendo a Z due punti all'infinito si ottiene una superficie di Riemann compatta e connessa C . Più esattamente si possono incollare a Z due piccoli dischi $\{w : |w| < \varepsilon\}$ e $\{t : |t| < \varepsilon\}$ per mezzo delle identificazioni

$$\begin{aligned} w \mapsto (x, y) \quad \text{dove} \quad x &= f\left(\frac{1}{w}\right), \quad y = \frac{1}{w}, \\ t \mapsto (x, y) \quad \text{dove} \quad x &= -f\left(\frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Per ottenere C dalle nostre due copie del piano delle y tagliato (e completato) dobbiamo incollarle in base alla seguente ricetta. Attacciamo un lato di ognuno dei tagli del piano "inferiore" al lato opposto del corrispondente taglio sul piano "superiore". Ciò è rappresentato nella figura qui sotto. Dopo aver incollato si ottengono due frecce non spezzate, una tratteggiata e una no.

Per capire come è fatta C dal punto di vista topologico è conveniente effettuare una inversione rispetto all'origine ($y \mapsto 1/\bar{y}$) nel piano tagliato "superiore". Ciò ha l'effetto di cambiare l'orientazione, cambiando in particolare il verso delle frecce "superiori" nella figura qui sopra. Il processo di incollamento può allora essere visualizzato, in stadi successivi, come segue.

La superficie di Riemann che ne risulta ha dunque questo aspetto:

In altre parole, C ha genere pari a 2. Per un F generale, la stessa costruzione produce una superficie di Riemann di genere $g = n - 1$:

Ora scriveremo esplicitamente tutti i differenziali abeliani su C . Poniamo

$$\varphi = \frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Nel nostro caso particolare

$$\varphi = \frac{dx}{6y^5} = \frac{dy}{2x}.$$

Usando la prima di queste due espressioni vicino alle radici seste dell'unità, dove y non si annulla e x è una coordinata locale, e la seconda espressione lontano dalle radici seste dell'unità, dove x non si annulla e y è una coordinata locale, si vede

facilmente che φ è olomorfa e mai nulla su Z . Nella coordinata w , invece, abbiamo che

$$\varphi = \frac{w^3}{2\sqrt{1-w^6}} d\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{w}{2\sqrt{1-w^6}} dw,$$

e dunque φ ha uno zero semplice per $w = 0$; lo stesso accade per $t = 0$. Per un F generale considerazioni analoghe mostrerebbero che φ è olomorfa, non si annulla su Z , e ha zeri di molteplicità $n - 2$ nei due punti all'infinito. Vi sono allora almeno g differenziali indipendenti su C , e cioè

$$\varphi, y\varphi, y^2\varphi, \dots, y^{g-1}\varphi.$$

Dico che questo è tutto, cioè che ogni differenziale abeliano su C è una combinazione lineare di quelli appena elencati. Si può ragionare come segue. Sia h l'involuzione su C che manda (x, y) in $(-x, y)$. Ogni differenziale abeliano α si può scrivere come somma della sua parte h -invariante e della sua parte h -antiinvariante, e cioè di

$$\beta = \frac{\alpha + h^*(\alpha)}{2}, \quad \gamma = \frac{\alpha - h^*(\alpha)}{2}.$$

La parte invariante, e cioè β , discende a un differenziale olomorfo sul piano delle y , almeno lontano dalle radici di F . Se p è una di queste radici, β si può scrivere, vicino a $(0, p)$ e nella coordinata x , come $\beta = a(x)dx$, dove

$$a(x) = \sum_{i \geq 0} c_i x^i.$$

Dato che β è invariante per l'involuzione $x \mapsto -x$, tutti i coefficienti di indice pari devono essere nulli, cosicché possiamo scrivere

$$\beta = 2b(x^2)x dx = b(y)dy$$

per qualche funzione olomorfa b . Dunque β discende a un differenziale olomorfo su *tutto* il piano (completato) delle y . Dato che non vi sono differenziali abeliani non nulli sulla sfera di Riemann, β deve essere nullo. Sappiamo dunque che ogni differenziale abeliano α su C è antiinvariante. Il quoziente α/φ è allora una funzione meromorfa invariante su C che è olomorfa su Z , dato che φ non vi si annulla mai. Dunque

$$\frac{\alpha}{\varphi} = P(y)$$

per qualche *polinomio* P . Il grado di P non può superare $g - 1 = n - 2$ dato che φ ha degli zeri di ordine $n - 2$ all'infinito.

In conclusione si è visto che, almeno nei casi considerati finora, il genere può essere equivalentemente definito come:

- i) il numero di manici di C ,
- ii) la dimensione dello spazio dei differenziali abeliani su C ,
- iii) la metà del numero degli zeri di un differenziale abeliano su C più uno.

Ora vedremo che questo è vero per *ogni* superficie di Riemann compatta e connessa. Consideriamo la successione di spazi vettoriali e applicazioni lineari

(2.2)

$$0 \rightarrow H^0(C, K_C) \rightarrow H^1(C, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C) \xrightarrow{d} H^1(C, K_C) \rightarrow H^2(C, \mathbb{C}) \rightarrow 0,$$

dove il significato dei simboli è il seguente:

- $H^0(C, K_C)$ (spesso scritto, in forma abbreviata, $H^0(K_C)$ o $H^0(K)$) è lo spazio vettoriale dei differenziali abeliani su C ,

- $H^1(C, K_C)$ (oppure, in forma abbreviata, $H^1(K_C)$ o $H^1(K)$) sta per

$$\frac{(1, 1)\text{-forme}}{(1, 1)\text{-forme } \bar{\partial}\text{-esatte}},$$
- $H^i(C, \mathbb{C})$ (oppure, in forma abbreviata, $H^i(\mathbb{C})$) sta per

$$\frac{i\text{-forme } d\text{-chiusse}}{i\text{-forme } d\text{-esatte}},$$
- $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ (oppure, in forma abbreviata, $H^1(\mathcal{O}_C)$ o $H^1(\mathcal{O})$) sta per

$$\frac{(0, 1)\text{-forme}}{(0, 1)\text{-forme } \bar{\partial}\text{-esatte}}.$$

Le applicazioni sono indotte da quelle ovvie a livello di forme; in particolare, d è indotta dalla differenziazione esterna. Naturalmente, usando gli isomorfismi di Dolbeault e di de Rham (dei quali riparleremo nel Capitolo 3), la 2.2 si identifica con una parte della successione esatta lunga di coomologia associata alla successione esatta di fasci

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}_C \xrightarrow{d} K_C \rightarrow 0,$$

dove \mathcal{O}_C è il fascio delle funzioni olomorfe su C e K_C è il fascio canonico. Ma di questo non avremo bisogno.

Dico che la successione 2.2 è esatta. Il solo punto che merita qualche attenzione è la verifica che l'applicazione dai differenziali abeliani a $H^1(\mathbb{C})$ sia iniettiva. Sia α un differenziale abeliano e supponiamo che $\alpha = d\beta$. Allora $\bar{\partial}\beta = 0$, e quindi β è olomorfa, dunque costante, e $\alpha = d\beta = 0$. L'esattezza di 2.2 nelle altre posizioni è immediata. Verifichiamo ad esempio l'esattezza in $H^1(\mathbb{C})$. Sia α una 1-forma d -chiusa e scriviamo $\alpha = \beta + \gamma$, dove β ha tipo $(1, 0)$ e γ ha tipo $(0, 1)$. Dire che la classe di α va a zero in $H^1(\mathcal{O})$ significa che dire che γ è della forma $\bar{\partial}\eta$. Ma allora

$$\begin{aligned} \bar{\partial}(\beta - \partial\eta) &= \bar{\partial}\beta + \partial\bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\beta + \partial\gamma = d\alpha = 0, \\ \beta - \partial\eta &= \beta + \gamma - d\eta = \alpha - d\eta. \end{aligned}$$

La prima di queste identità dice che $\beta - \partial\eta$ è un differenziale abeliano, la seconda che rappresenta, in $H^1(\mathbb{C})$, la stessa classe di α .

Vogliamo ora mostrare che l'applicazione antilineare

$$(2.3) \quad H^0(C, K_C) \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C) \quad \alpha \mapsto \text{classe di } \bar{\alpha}$$

è iniettiva. Supponiamo infatti che $\bar{\alpha} = \bar{\partial}\beta$. Allora

$$\partial\bar{\partial}\beta = \overline{\bar{\partial}\alpha} = 0.$$

Ora, se $z = x + \sqrt{-1}y$ è una coordinata locale su C e x, y sono le sue parti reale e immaginaria,

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} = \Delta\beta,$$

cosicché $\partial\bar{\partial}\beta = \Delta\beta dz \wedge d\bar{z}$ è essenzialmente il Laplaciano di β . Sappiamo dunque che β è una funzione armonica. Ma il principio del massimo (vedi il Capitolo 6) dice che, se una funzione armonica ha un punto di massimo locale, essa è costante su un suo intorno. Dato che C è compatta e connessa, β deve essere costante, e quindi α è nulla.

Mostrare che 2.3 è in effetti un isomorfismo non è altrettanto semplice. Ciò che bisogna mostrare è che, se α è una $(0, 1)$ -forma, possiamo trovare una funzione β tale che

$$\partial(\alpha - \bar{\partial}\beta) = 0.$$

In altre parole, dobbiamo essere in grado di risolvere l'equazione differenziale

$$\partial\bar{\partial}\beta = \partial\alpha.$$

Che ciò è possibile segue dal seguente risultato più preciso, che può essere considerato la pietra angolare della teoria delle superficie di Riemann compatte.

TEOREMA 2.5. *Sia C una superficie di Riemann compatta e connessa, e sia ψ una 2-forma liscia su C . Allora vi è una funzione doppiamente differenziabile u tale che*

$$\partial\bar{\partial}u = \psi$$

se e solo se

$$\int_C \psi = 0.$$

Inoltre u è liscia.

Per poter applicare il teorema 2.5 al nostro problema particolare dobbiamo solo osservare che

$$\int_C \partial\alpha = \int_C d\alpha = 0,$$

per la formula di Stokes. Per una dimostrazione del teorema 2.5 rimandiamo al Capitolo 6; qui vogliamo solo riformulare il teorema per renderlo più plausibile. Scegliamo su C una forma di volume Φ , cioè una forma che è localmente del tipo

$$\frac{\sqrt{-1}}{2} a dz \wedge d\bar{z} = a dx \wedge dy,$$

dove a è una funzione positiva, e definiamo un operatore differenziale L ponendo

$$Lu = \sqrt{-1} \frac{\partial\bar{\partial}u}{\Phi}.$$

Definiamo anche un prodotto interno sullo spazio delle funzioni su C ponendo

$$\langle u, v \rangle = \int_C u\bar{v}\Phi.$$

Rispetto a questo prodotto interno, L è un operatore differenziale fortemente ellittico e autoaggiunto. Infatti

$$\begin{aligned} \langle Lu, v \rangle &= \sqrt{-1} \int_C \frac{\partial\bar{\partial}u}{\Phi} \bar{v}\Phi = \sqrt{-1} \int_C \partial\bar{\partial}u\bar{v} = \sqrt{-1} \int_C d(\bar{\partial}u\bar{v}) + \sqrt{-1} \int_C \bar{\partial}u \wedge \partial\bar{v} \\ &= \sqrt{-1} \int_C \bar{\partial}u \wedge \partial\bar{v} = \sqrt{-1} \int_C d(u\partial\bar{v}) - \sqrt{-1} \int_C u\bar{\partial}\partial\bar{v} \\ &= -\sqrt{-1} \int_C u\bar{\partial}\partial\bar{v} = \langle u, Lv \rangle. \end{aligned}$$

Segue dalla teoria generale degli operatori fortemente ellittici che $Lu = v$ si può risolvere se e solo se v è ortogonale al nucleo dell'aggiunto di L , cioè di L . Ma

questo nucleo consiste esattamente delle funzioni armoniche, che sono tutte costanti. Dunque la condizione per la risolubilità di $Lu = v$ è:

$$\int_C v\Phi = 0,$$

e $\partial\bar{\partial}u = \psi$ può essere risolta se e solo se

$$0 = \int_C \frac{\psi}{\Phi} \Phi = \int_C \psi.$$

Un'altra conseguenza del teorema 2.5 è che, nella successione 2.2, l'omomorfismo da $H^1(C, K_C)$ ad $H^2(C, \mathbb{C})$ è un isomorfismo: infatti, se α è una $(1, 1)$ -forma e $\alpha = d\beta$, possiamo scrivere

$$\alpha = d\beta = \partial\bar{\partial}\gamma = -\bar{\partial}(\partial\gamma),$$

e quindi α rappresenta zero in $H^1(C, K_C)$. Inoltre $H^1(C, K_C)$ può essere calcolato in modo esplicito. Per vederlo, sia α una $(1, 1)$ -forma; c'è una costante k con la proprietà che

$$\int_C \alpha = k \int_C \Phi.$$

In virtù del teorema 2.5 ciò implica che possiamo trovare β tale che

$$\alpha - k\Phi = \partial\bar{\partial}\beta = d\bar{\partial}\beta.$$

Quindi ogni elemento di $H^1(C, K_C)$ è un multiplo della classe di Φ , e $H^1(C, K_C)$ ha dimensione uno.

In conclusione, se scriviamo $h^i(,)$ per indicare la dimensione complessa di $H^i(,)$, la successione esatta 2.2 e i corollari del teorema 2.5 ci dicono che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h^1(C, \mathbb{C}) &= h^0(C, K_C) = h^1(C, \mathcal{O}_C), \\ h^1(C, K_C) &= h^2(C, \mathbb{C}) = 1. \end{aligned}$$

La più notevole di queste due uguaglianze è senz'altro la prima, poiché ci dice che due invarianti di C che sono definiti usando la struttura olomorfa, come $h^0(C, K_C)$ e $h^1(C, \mathcal{O}_C)$, sono in effetti invarianti differenziali (anzi topologici), perchè tale è $h^2(C, \mathbb{C})$. Dato che abbiamo calcolato esplicitamente, per almeno una superficie di Riemann per ogni genere, che $h^0(K)$ è pari al genere, e dato che tutte le superficie di Riemann di genere dato sono identiche dal punto di vista differenziale, ne deduciamo che

$$(2.4) \quad \frac{1}{2} h^1(C, \mathbb{C}) = h^0(C, K_C) = h^1(C, \mathcal{O}_C) = g(C),$$

dove $g(C)$ denota il genere di C .

I teoremi di Riemann-Roch e di dualità

Sia C una superficie di Riemann compatta e connessa. Ricordiamo che un fibrato in rette L su C può essere descritto dando un ricoprimento di C con aperti U_α e funzioni di transizione olomorfe e mai nulle $g_{\alpha\beta}$ tali che

$$(3.1) \quad g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} \quad \text{su } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$$

per ogni scelta di α, β e γ , e che una sezione olomorfa (o C^∞) di L è una collezione $s = \{s_\alpha\}$ di funzioni olomorfe (o C^∞) $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ tali che

$$(3.2) \quad s_\alpha = g_{\alpha\beta}s_\beta \quad \text{su } U_\alpha \cap U_\beta.$$

In modo simile si definiscono le sezioni meromorfe di L . Analogamente, una $(0, 1)$ -forma a valori in L è una collezione $\varphi = \{\varphi_\alpha\}$ di $(0, 1)$ -forme C^∞ sugli aperti U_α tali che

$$\varphi_\alpha = g_{\alpha\beta}\varphi_\beta \quad \text{su } U_\alpha \cap U_\beta.$$

Sia ora s una sezione C^∞ di L . Differenziando la 3.2 si ottiene che

$$\bar{\partial}s_\alpha = g_{\alpha\beta}\bar{\partial}s_\beta,$$

dato che $g_{\alpha\beta}$ è una funzione olomorfa. Dunque $\{\bar{\partial}s_\alpha\}$ è una $(0, 1)$ -forma a valori in L , che indicheremo con $\bar{\partial}s$.

Ci sarà utile adottare la seguente convenzione. Sia f una funzione meromorfa in un intorno di un punto p di C . Se f ha uno zero di ordine n in p diremo anche che f ha un polo di ordine $-n$ in p , e viceversa quando f ha un polo di ordine n diremo anche che ha uno zero di ordine $-n$.

3.1. Il fibrato in rette associato a un divisore

Un divisore su una superficie di Riemann C è una combinazione lineare formale finita a coefficienti interi di punti di C , cioè una espressione $D = \sum_{p \in C} n_p p$ dove gli n_p sono interi, nulli tranne che per un numero finito di punti p . Il *grado* di D è

$$\deg(D) = \sum_p n_p.$$

Se $n_p \neq 0$ diremo impropriamente che p appartiene a D . Se U è un aperto, una equazione per D in U è una funzione meromorfa su U che ha ordine di zero esattamente uguale a n_p in ogni punto $p \in U$. Sia ora $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di C , e sia f_α una equazione per D in U_α . Potremmo ad esempio scegliere come U_α degli aperti coordinati con coordinata z_α centrata in $p_\alpha \in U_\alpha$ e tali che $n_q = 0$ per ogni $q \in U_\alpha$ diverso da p_α , e come f_α la funzione $z_\alpha^{n_{p_\alpha}}$. Poniamo

$$g_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta}.$$

È immediato verificare che le $g_{\alpha\beta}$ soddisfano la condizione di compatibilità 3.1 e che sono olomorfe e mai nulle. Indicheremo, un po' impropriamente, con $\mathcal{O}(D)$ il corrispondente fibrato in rette; più propriamente, con questa notazione andrebbe indicato il fascio delle sezioni olomorfe del fibrato stesso. È facile verificare che cambiando ricoprimento o equazioni per D si ottengono funzioni di transizione equivalenti, cosicché $\mathcal{O}(D)$ è ben definito.

Sia $s = \{s_\alpha\}$ una sezione di $\mathcal{O}(D)$. Dunque

$$\frac{s_\alpha}{f_\alpha} = \frac{s_\beta}{f_\beta} \quad \text{su } U_\alpha \cap U_\beta,$$

e quindi s_α/f_α è la restrizione a U_α di una funzione meromorfa F globalmente definita; inoltre l'ordine di polo di F in qualsiasi punto p non supera n_p . Viceversa, data una funzione meromorfa F con queste proprietà, $\{f_\alpha F\}$ è una sezione di $\mathcal{O}(D)$. In altri termini, se denotiamo con $H^0(C, L)$ lo spazio di tutte le sezioni di un fibrato in rette L , e con $\mathcal{L}(D)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni meromorfe il cui ordine di polo in ogni p non supera n_p , allora

$$H^0(C, \mathcal{O}(D)) \simeq \mathcal{L}(D).$$

Sia L un fibrato in rette dato da funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$, e supponiamo che abbia una sezione meromorfa non nulla $s = \{s_\alpha\}$. Il *divisore di s* è, per definizione,

$$D = \sum_{p \in C} n_p p,$$

dove n_p sta per l'ordine di zero di s in p ; si noti che si tratta di una somma finita. Ora, s_α è chiaramente una equazione locale per D ; dato che

$$g_{\alpha\beta} = \frac{s_\alpha}{s_\beta},$$

il fibrato L è isomorfo a $\mathcal{O}(D)$. In particolare, per mostrare che un fibrato in rette è della forma $\mathcal{O}(D)$ basta mostrare che ha una sezione meromorfa non nulla.

Il prodotto di fibrati in rette corrisponde alla somma di divisori; più esattamente

$$\mathcal{O}(D + D') = \mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}(D'); \quad \mathcal{O}(D)^{-1} = \mathcal{O}(-D).$$

Spesso scriveremo $L(D)$ per indicare il prodotto tensoriale $L \otimes \mathcal{O}(D)$.

Sia L un fibrato in rette, e siano s e t due sue sezioni meromorfe non nulle. Allora il quoziente s/t è una funzione meromorfa su C , e il teorema dei residui mostra che ha tanti poli quanti zeri. Quindi il numero di zeri di s e di t è lo stesso (i poli vengono contati come zeri con molteplicità negativa). Ha allora senso definire il *grado* di L come

$$\deg(L) = \text{numero di zeri} - \text{numero di poli di una sezione meromorfa di } L.$$

In altre parole

$$\deg(\mathcal{O}(D)) = \deg(D).$$

Il problema è che non sappiamo ancora se ogni fibrato in rette su C ammette una sezione meromorfa non nulla, o equivalentemente se è della forma $\mathcal{O}(D)$ per qualche divisore D ; vedremo più avanti che ciò è vero, e quindi che il grado di L è definito per ogni fibrato in rette L su C . Torneremo ancora sulla relazione tra divisori e fibrati in rette, in un contesto un po' più generale, nel capitolo 10.

3.2. L'isomorfismo di Dolbeault

Sia L un fibrato in rette su C . Consideriamo la successione di fasci

$$(3.3) \quad 0 \rightarrow L \rightarrow \mathcal{A}^0(L) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^1(L) \rightarrow 0,$$

dove $\mathcal{A}^0(L)$ è il fascio delle sezioni C^∞ di L , e $\mathcal{A}^1(L)$ quello delle $(0,1)$ -forme a valori in L . Dico che questa successione è esatta. Il solo problema è mostrare che $\bar{\partial}$ è suriettiva, cioè che, se φ è una forma di tipo $(0,1)$ a valori in L definita su un intorno di un punto $p \in C$, allora si può trovare una sezione ξ di L su un intorno di p tale che

$$(3.4) \quad \varphi = \bar{\partial}\xi$$

sull'intorno stesso. Dato che si tratta di una questione puramente locale possiamo supporre che L sia banale e lavorare su \mathbb{C} invece che su C . Sia χ una funzione C^∞ a supporto compatto che vale 1 vicino a p ed è nulla fuori da un intorno U di p sulla cui chiusura φ sia definita. Rimpiazzando φ con la forma che è uguale a $\chi\varphi$ su U e a zero altrove possiamo supporre che φ sia definita e liscia su tutto \mathbb{C} e abbia supporto compatto. La risolubilità locale dell'equazione 3.4 segue allora dal seguente semplice risultato.

LEMMA 3.1. *Sia $g(z)d\bar{z}$ una $(0,1)$ -forma a supporto compatto su \mathbb{C} . Poniamo*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\zeta - z} g(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Allora $\bar{\partial}f = g d\bar{z}$.

Per dimostrare il lemma notiamo innanzitutto che un semplice cambio di variabili dà

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\zeta} g(z + \zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Derivando sotto il segno di integrale otteniamo che

$$\begin{aligned} 2\pi\sqrt{-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) &= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\zeta} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z + \zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\zeta| \geq \varepsilon} d \left(g(z + \zeta) \frac{1}{\zeta} d\zeta \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\zeta| = \varepsilon} g(z + \zeta) \frac{1}{\zeta} d\zeta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} g(z + \varepsilon e^{\sqrt{-1}\theta}) \sqrt{-1} d\theta \\ &= 2\pi\sqrt{-1} g(z) \end{aligned}$$

dove la differenziazione esterna nel secondo integrale è effettuata rispetto a ζ e $\bar{\zeta}$. Questo dimostra il lemma.

Ora che abbiamo dimostrato l'esattezza della successione 3.3, ne ricaviamo una successione esatta lunga di coomologia

$$0 \rightarrow H^0(C, L) \rightarrow H^0(C, \mathcal{A}^0(L)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{A}^1(L)) \rightarrow H^1(C, L) \rightarrow H^1(C, \mathcal{A}^0(L)) \rightarrow \dots$$

Mostreremo che $H^1(C, \mathcal{A}^0(L))$ è nullo, e quindi che si ha l'*isomorfismo di Dolbeault*

$$(3.5) \quad H^1(C, L) = \frac{(0,1)\text{-forme a valori in } L}{(0,1)\text{-forme } \bar{\partial}\text{-esatte a valori in } L}.$$

Per vedere che $H^1(C, \mathcal{A}^0(L)) = 0$, sia $\{\xi_{ij}\}$ un 1-cociclo a valori in $\mathcal{A}^0(L)$ rispetto a un ricoprimento aperto $\{U_i\}$. Dunque

$$\xi_{ij} + \xi_{jk} = \xi_{ik} \quad \text{su } U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Scegliendo $i = j$ si ottiene che $\xi_{ii} = 0$ su $U_i \cap U_k$ per ogni k , e quindi che $\xi_{ii} = 0$ su U_i ; poi, scegliendo $i = k$, si ottiene che $\xi_{ij} = \xi_{ji}$ su $U_i \cap U_j$. Ora scegliamo una partizione C^∞ dell'unità $\{\lambda_i\}$ subordinata a $\{U_i\}$. Poniamo

$$\eta_i = \sum_h \lambda_h \xi_{hi},$$

dove si intende che $\lambda_h \xi_{hi}$ viene estesa a zero su $U_i - (U_i \cap U_h)$. Allora

$$\eta_j - \eta_i = \sum_h \lambda_h \xi_{hj} - \sum_h \lambda_h \xi_{hi} = \sum_h \lambda_h (\xi_{ih} + \xi_{hj}) = \sum_h \lambda_h \xi_{ij} = \xi_{ij}.$$

Dunque $\{\xi_{ij}\}$ rappresenta zero in $H^1(C, \mathcal{A}^0(L))$. Questo completa la dimostrazione dell'isomorfismo 3.5.

Nel seguito della prima parte di queste note non faremo alcun uso della coomologia dei fasci. La sola ragione per discutere l'isomorfismo di Dolbeault è stata di indicare che le nostre argomentazioni hanno anche una interpretazione coomologica.

3.3. Il teorema di Riemann-Roch

Il problema di Riemann-Roch è quello di calcolare la dimensione di $H^0(C, L)$, dove L è un fibrato in rette su una superficie di Riemann compatta e connessa C . Una risposta parziale è fornita dal teorema di Riemann-Roch.

TEOREMA 3.2 (Riemann-Roch). *Sia C una superficie di Riemann compatta e connessa di genere g , e sia L un fibrato in rette su di essa. Gli spazi vettoriali $H^0(C, L)$ e $H^1(C, L)$ sono di dimensione finita e le loro dimensioni sono legate dalla formula di Riemann-Roch*

$$h^0(C, L) - h^1(C, L) = \deg(L) + 1 - g.$$

Notiamo innanzitutto che il teorema è chiaramente vero se $L = \mathcal{O}$. Sia p un punto di C . Consideriamo la successione

$$(3.6) \quad 0 \rightarrow H^0(C, L(-p)) \rightarrow H^0(C, L) \xrightarrow{\alpha} L_p \xrightarrow{\beta} H^1(C, L(-p)) \xrightarrow{\gamma} H^1(C, L) \rightarrow 0,$$

dove L_p è la fibra di L sul punto p , α associa ad ogni sezione il suo valore nel punto p , e β è definita come segue. Se $c \in L_p$, c 'è una sezione liscia di L che assume il valore c in p ed è olomorfa su un intorno di p ; indichiamola con ξ . Definiamo allora $\beta(c)$ come la classe di $\bar{\partial}\xi$; si noti che $\bar{\partial}\xi$ è identicamente nulla su un intorno di p . Per convincersi che una ξ con le caratteristiche cercate esiste scegliamo innanzitutto una sezione s di L su un intorno U di p che assuma il valore c in p . Scegliamo poi una funzione liscia χ che valga 1 su un intorno di p e zero fuori da U (dato che dovremo usare spesso funzioni di questo tipo, conveniamo di chiamare una tale χ un *brufolo* in U intorno a p). Una ξ con le caratteristiche cercate è ad esempio χs , estesa a zero fuori da U .

La successione 3.6 è esatta. Questo si verifica con facilità. L'esattezza nei due termini di sinistra è evidente. Mostriamo che si ha esattezza in L_p . Con le notazioni appena stabilite, se $\beta(c) = 0$, allora $\bar{\partial}\xi = \bar{\partial}\psi$, dove ψ è una sezione C^∞ di L che si annulla in p . Quindi $\xi - \psi$ è una sezione olomorfa di L il cui valore in p è c ; in altre parole

$$\alpha(\xi - \psi) = c.$$

D'altra parte è chiaro dalle definizioni che la composizione di α e β è zero. È altrettanto facile mostrare che γ è suriettiva. Data una $(0, 1)$ -forma φ a valori in

L , vicino a p possiamo scrivere $\varphi = \bar{\partial}u$ per la risolubilità locale dell'equazione 3.4. Allora, se χ è un brufolo intorno a p , $\varphi - \bar{\partial}(\chi u)$ è una forma a valori in $L(-p)$ la cui classe ha come immagine la classe di φ . Mostriamo infine che la 3.6 è esatta in $H^1(L(-p))$. È chiaro per costruzione che la composizione di β e γ è nulla. Una classe in $H^1(L(-p))$ è rappresentata da una $(0,1)$ -forma φ a valori in $L(-p)$. Se z è una coordinata locale centrata in p possiamo scrivere localmente $\varphi = z\psi$, dove ψ è una $(0,1)$ -forma a valori in L su un intorno di p . Per la risolubilità locale dell'equazione 3.4 possiamo scrivere $\psi = \bar{\partial}u$, e quindi $\varphi = \bar{\partial}(zu)$, vicino a p . Se χ è un opportuno brufolo intorno a p , χzu si estende a una sezione C^∞ di $L(-p)$ su tutta C , che indichiamo con w . Le forme φ e $\varphi' = \varphi - \bar{\partial}w$ rappresentano la stessa classe in $H^1(L(-p))$. Questo mostra che ogni classe in $H^1(L(-p))$ ha un rappresentante che è identicamente nullo su un intorno di p , dato che φ' gode di questa proprietà per costruzione. Supponiamo che γ mandi a zero la classe di φ , cioè che esista una sezione liscia σ di L tale che $\varphi = \bar{\partial}\sigma$. Per quanto appena dimostrato possiamo supporre che φ sia identicamente nulla, cioè che σ sia olomorfa, su un intorno di p . Ma allora $\bar{\partial}\sigma$ rappresenta $\beta(c)$, dove c è il valore di σ in p . Questo conclude la dimostrazione dell'esattezza della successione 3.6.

Possiamo ora dimostrare il teorema di Riemann-Roch. Dato che la somma alterna delle dimensioni in una successione esatta di spazi vettoriali è nulla, e il grado di $L(-p)$ è uno meno del grado di L , la successione esatta 3.6 mostra che

$$\text{Riemann-Roch vale per } L \iff \text{vale per } L(-p)$$

Poiché si è osservato che il teorema di Riemann-Roch vale per \mathcal{O} , questo dimostra che esso vale per ogni $\mathcal{O}(D)$. Se accettiamo il fatto che ogni fibrato in rette su C è della forma $\mathcal{O}(D)$, questo conclude la dimostrazione del teorema di Riemann-Roch.

Applicando la formula di Riemann-Roch al fibrato canonico si ottiene immediatamente il seguente risultato.

COROLLARIO 3.3. *Il grado del fibrato canonico di una superficie di Riemann compatta e connessa di genere g è $2g - 2$.*

3.4. Il teorema di dualità

Per poter utilizzare pienamente il teorema di Riemann-Roch è necessario dare una descrizione alternativa di $H^1(C, L)$. Consideriamo una $(0,1)$ -forma φ a valori in L , e indichiamo con $[\varphi]$ la sua classe in $H^1(C, L)$; φ è una collezione $\{\varphi_\alpha\}$ di $(0,1)$ -forme ordinarie su aperti U_α , legate da

$$\varphi_\alpha = g_{\alpha\beta}\varphi_\beta,$$

dove le $g_{\alpha\beta}$ sono funzioni di transizione per L . Ora sia ψ una sezione di KL^{-1} ; possiamo pensarla come una collezione $\{\psi_\alpha\}$ di $(1,0)$ -forme olomorfe legate da

$$\psi_\alpha = g_{\alpha\beta}^{-1}\psi_\beta.$$

Dunque

$$\psi_\alpha \wedge \varphi_\alpha = \psi_\beta \wedge \varphi_\beta \quad \text{su } U_\alpha \cap U_\beta.$$

Definiamo $\psi \wedge \varphi$ come la $(1,1)$ -forma che ha restrizione ad U_α uguale a $\psi_\alpha \wedge \varphi_\alpha$ per ogni α . Definiamo una dualità $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tra $H^0(C, KL^{-1})$ e $H^1(C, L)$ ponendo

$$\langle \psi, [\varphi] \rangle = \int_C \psi \wedge \varphi.$$

La proprietà fondamentale di questa dualità è la seguente.

TEOREMA 3.4 (Teorema di dualità). $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è una dualità perfetta tra $H^0(C, KL^{-1})$ e $H^1(C, L)$.

Per dimostrare il teorema, notiamo innanzitutto che esso vale per $L = \mathcal{O}$ e per $L = K$. Riguardo a \mathcal{O} , si è mostrato nel capitolo 2 che $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ è un antiisomorfismo tra $H^0(C, K)$ e $H^1(C, \mathcal{O})$, e si ha che

$$\langle \alpha, \sqrt{-1}[\bar{\alpha}] \rangle = \int_C \alpha \wedge \bar{\alpha} > 0 \quad \text{se } \alpha \neq 0.$$

Per quanto riguarda K , sappiamo che $H^1(C, K)$ è generato dalla classe di una forma di volume Ψ , e si ha che

$$\langle 1, [\Psi] \rangle = \int_C \Psi > 0.$$

Per dimostrare il teorema di dualità in generale, mostreremo che, per ogni punto p di C ,

il teorema di dualità vale per L e $KL^{-1} \iff$ vale per $L(-p)$ e $KL^{-1}(p)$.

Per farlo, consideriamo la successione esatta 3.6 e il suo analogo per KL^{-1} :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(C, L(-p)) \longrightarrow H^0(C, L) \xrightarrow{\alpha} L_p \xrightarrow{\beta} H^1(C, L(-p)) \longrightarrow H^1(C, L) \longrightarrow 0 \\ 0 \longleftarrow H^1(C, KL^{-1}(p)) \longleftarrow H^1(C, KL^{-1}) \xleftarrow{\delta} KL^{-1}(p)_p \xleftarrow{\gamma} H^0(C, KL^{-1}(p)) \longleftarrow H^0(C, KL^{-1}) \longleftarrow 0 \end{aligned}$$

Ognuno degli spazi vettoriali nella successione superiore, tranne per ora quello centrale, è in dualità con lo spazio vettoriale immediatamente sottostante, in modo compatibile con gli omomorfismi. In virtù del “lemma dei cinque”, per concludere basterà definire una dualità perfetta tra L_p e $KL^{-1}(p)_p$ che sia compatibile, a meno di segno, con le dualità tra $H^0(C, L)$ e $H^1(C, KL^{-1})$, $H^1(C, L(-p))$ e $H^0(C, KL^{-1}(p))$. Supponiamo che c appartenga a L_p ed e a $KL^{-1}(p)_p$. Sia z una coordinata locale centrata in p . Ci sono una sezione s di L e una sezione t di L^{-1} su un intorno di p tali che

$$c = s(p); \quad e = t(p) \frac{dz}{z}.$$

Possiamo allora porre

$$\langle e, c \rangle = 2\pi\sqrt{-1} t(p)s(p).$$

Verifichiamo le compatibilità. Sia c come sopra, e sia φ una sezione di $KL^{-1}(p)$. Vicino a p , si può scrivere φ sotto la forma tdz/z , dove t è una sezione locale di L^{-1} . Vogliamo mostrare che

$$\langle \gamma(\varphi), c \rangle = \langle \varphi, \beta(c) \rangle.$$

Il lato sinistro vale $2\pi\sqrt{-1} s(p)t(p)$. Per calcolare il lato destro, ricordiamo che $\beta(c)$ è la classe di $\bar{\partial}(\chi s)$, dove χ è un brufolo intorno a p . Allora, se Γ è un piccolo circolo intorno a p ,

$$\langle \varphi, \beta(c) \rangle = \int_C \varphi \wedge \bar{\partial}(\chi s) = - \int_C d(\chi s \varphi) = \int_{\Gamma} st \frac{dz}{z} = 2\pi\sqrt{-1} s(p)t(p).$$

Un ragionamento simile dimostra la compatibilità, a meno di segno, con α e δ . Ciò conclude la dimostrazione del teorema di dualità.

Il teorema di dualità rende possibile riscrivere la formula di Riemann-Roch nella seguente forma, più utile di quella originale:

$$(3.7) \quad h^0(C, L) - h^0(C, KL^{-1}) = \deg L + 1 - g.$$

I teoremi di Riemann-Roch e di dualità sono stati in realtà dimostrati solo per fibrati in rette della forma $\mathcal{O}(D)$; tuttavia, come abbiamo già accennato, *ogni* fibrato in rette su una superficie di Riemann compatta è di questo tipo. Qui non daremo una dimostrazione completa di ciò, ma ci limiteremo alle seguenti semplici osservazioni. Sia L un fibrato in rette di grado d su una superficie di Riemann compatta e connessa C , e supponiamo di sapere che

$$(3.8) \quad h^1(C, L) < +\infty.$$

Allora L è necessariamente della forma $\mathcal{O}(D)$, per qualche divisore D . Infatti, si consideri la successione esatta

$$0 \rightarrow H^0(C, L) \rightarrow H^0(C, L(p)) \rightarrow L(p)_p \rightarrow H^1(C, L) \rightarrow H^1(C, L(p)) \rightarrow 0,$$

dove p è un punto di C . Se $h^0(C, L(p)) > 0$, siamo a posto, perchè allora $L(p)$ ha una sezione olomorfa non nulla, e quindi L ha una sezione meromorfa non nulla s , e $L = \mathcal{O}(D)$, dove D è il divisore degli zeri di s (e, al solito, un polo conta come zero di molteplicità negativa). Possiamo dunque supporre che $h^0(C, L(p)) = 0$, cosicché

$$h^1(C, L(p)) = h^1(C, L) - 1.$$

Ora ripetiamo lo stesso ragionamento, rimpiazzando L con $L(p)$, e così via. Dato che $h^1(C, L)$ è finito, concludiamo che c'è un intero n tale che $h^0(C, L(np))$ non è nullo. Dunque L ha una sezione meromorfa non nulla, e quindi è della forma $\mathcal{O}(D)$. Resta da dimostrare la formula 3.8; questo verrà fatto nel capitolo 6.

Applicazioni del teorema di Riemann-Roch

In questo capitolo discuteremo alcune applicazioni elementari dei teoremi di Riemann-Roch e di dualità per un fibrato in rette L di grado d su una superficie di Riemann connessa e compatta C di genere g . Una osservazione immediata è che

$$\begin{aligned} h^0(C, L) &= 0 && \text{se } d < 0, \\ h^1(C, L) &= 0 && \text{se } d > 2g - 2. \end{aligned}$$

La prima di queste uguaglianze segue dal fatto che il numero di zeri di una sezione olomorfa non nulla di L è pari al grado di L . La seconda può essere ricavata applicando la prima identità a KL^{-1} , dato che il grado di K è pari a $2g - 2$ e $h^1(C, L) = h^0(C, KL^{-1})$ per dualità.

Dunque la formula di Riemann-Roch “risolve” il problema di Riemann-Roch quando $d < 0$ oppure $d > 2g - 2$. In particolare si ha che

$$h^0(C, L) = d + 1 - g \quad \text{se } d > 2g - 2.$$

I casi limite $d = 0$ e $d = 2g - 2$ sono facili da trattare. Se $d = 0$ e L ha una sezione non nulla, questa non può avere zeri, e quindi L è banale. Se $d = 2g - 2$ e $h^1(C, L)$ non è zero allora, per dualità, KL^{-1} deve essere banale. In conclusione

$$\begin{aligned} \text{se } d = 0, \text{ allora } L = \mathcal{O} \text{ e } h^0(C, L) = 1 \text{ oppure } h^0(C, L) = 0, \\ \text{se } d = 2g - 2, \text{ allora } L = K \text{ e } h^0(C, L) = g \text{ oppure } h^0(C, L) = g - 1. \end{aligned}$$

Per $0 < d < 2g - 2$ le cose non sono così semplici. Tutto quello che si può dire, per il momento, è che, per questi valori di d ,

$$h^0(C, L) \geq d + 1 - g.$$

Dunque, nel diagramma qui sotto, i possibili valori di $(d, h^0(L))$ giacciono sulle linee spesse o nella regione ombreggiata.

Potremo essere più precisi sul bordo superiore della regione ombreggiata più avanti, quando discuteremo il teorema di Clifford.

Vi è una stretta relazione tra fibrati in rette e applicazioni in spazi proiettivi. Sia C una superficie di Riemann connessa e compatta di genere g . Un *sistema lineare* su C è il proiettivizzato

$$|V| = \mathbb{P}V$$

di un sottospazio vettoriale V di $H^0(C, L)$, per qualche fibrato in rette L su C , e la dimensione di $|V|$ è la dimensione proiettiva, cioè la dimensione di V meno uno. Se la dimensione di $|V|$ è r , si usa dire che $|V|$ è una g_r^r . Se L è un fibrato in rette e D un divisore, $|L|$ e $|D|$ sono abbreviazioni per $|H^0(C, L)|$ e $|\mathcal{O}(D)|$, rispettivamente; un sistema lineare di questo tipo sarà detto *completo*. Si dice che $p \in C$ è un *punto base* per $|V|$ se $s(p) = 0$ per ogni $s \in V$.

Supponiamo che $|V|$ sia una g_d^r senza punti base; possiamo allora definire una applicazione olomorfa

$$\Phi_{|V|} : C \rightarrow \mathbb{P}(V^\vee),$$

dove V^\vee è il duale di V , ponendo

$$\Phi_{|V|}(p) = \text{l'iperpiano } \{s \in V : s(p) = 0\}.$$

Se scegliamo coordinate omogenee per $\mathbb{P}(V^\vee)$, cioè una base s_0, \dots, s_r per V , allora $\Phi_{|V|}$ è data da

$$p \mapsto [s_0(p) : \dots : s_r(p)],$$

dove $[s_0(p) : \dots : s_r(p)]$ è il punto di \mathbb{P}^r definito come segue. Scegliamo un generatore t per la fibra di L su p , e scriviamo $s_i(p) = f_i t$; allora

$$[s_0(p) : \dots : s_r(p)] = [f_0 : \dots : f_r].$$

Questa è una buona definizione perchè cambiare t ha l'effetto di moltiplicare tutti gli f_i per una stessa costante, e il lato destro è invariante per omotetie.

ESEMPIO 4.1. Sia p un punto di una superficie di Riemann compatta e connessa C ; allora $h^0(C, \mathcal{O}(p))$ vale 1 o 2. La seconda alternativa si presenta esattamente quando c'è una funzione meromorfa f su C la cui sola singolarità è un polo semplice in p . Allora $|\mathcal{O}(p)|$ non ha punti base e quindi definisce una applicazione Φ da C alla sfera di Riemann \mathbb{P}^1 ; in altre parole

$$\Phi(q) = [1 : f(q)],$$

dove si intende che l'immagine di p è il punto all'infinito $[0 : 1]$. Se $a \in \mathbb{C}$, la sezione $f - a$ di $\mathcal{O}(p)$ ha un solo zero. Questo significa che Φ è biunivoca. Inoltre, dato che l'unico zero di $f - a$ deve essere semplice, Φ è una immersione locale in ogni punto diverso da p ; è una immersione locale anche in p , dato che f ha un polo semplice. Detto altrimenti, C è isomorfa a \mathbb{P}^1 . In particolare, dato che la formula di Riemann-Roch dice che, quando C ha genere zero, allora $h^0(C, \mathcal{O}(p)) = 2$, concludiamo che la sola superficie di Riemann compatta e connessa di genere zero è, a meno di isomorfismo, la sfera di Riemann.

OSSERVAZIONE 4.2. Nel Capitolo 5 vedremo che ogni superficie di Riemann compatta e connessa di genere uno è isomorfa a \mathbb{C}/Λ per qualche reticolo Λ .

4.1. L'applicazione canonica

Un corollario dell'esempio 4.1 è che, su qualsiasi superficie di Riemann compatta e connessa C di genere $g \geq 1$, il sistema lineare canonico non ha punti base. In effetti, l'esempio 4.1 mostra che, per ogni p ,

$$1 = h^0(C, \mathcal{O}(p)) = h^1(C, K(-p)),$$

cosicché, per il teorema di Riemann-Roch,

$$h^0(C, K(-p)) = g - 1.$$

L'applicazione

$$\Phi_{|K|} : C \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$$

si chiama *applicazione canonica*.

Descriviamo ad esempio l'applicazione canonica per la superficie di Riemann C dell'esempio 2.4, usando le notazioni introdotte in quest'ultimo. Si è mostrato che

i differenziali abeliani su C sono le combinazioni lineari di $\varphi, y\varphi, y^2\varphi, \dots, y^{g-1}\varphi$. Dunque l'applicazione canonica per C è

$$(x, y) \mapsto [1 : y : y^2 : \dots : y^{g-1}].$$

In altri termini, l'applicazione canonica è ottenuta componendo la proiezione $(x, y) \mapsto y$ sulla sfera di Riemann con la $(g-1)$ -esima immersione di Veronese

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^{g-1} \\ y &\mapsto [1 : y : y^2 : \dots : y^{g-1}] \end{aligned}$$

(la cui immagine è la cosiddetta *curva razionale normale* di grado $g-1$). In particolare, in questo caso l'applicazione canonica è genericamente 2-1 e non 1-1.

D'ora in poi supporremo che $g > 1$. Supponiamo che l'applicazione canonica non sia iniettiva, cioè che ci siano punti distinti p e q tali che $\Phi_{|K|}(p) = \Phi_{|K|}(q)$. Questo significa che, se una sezione di K si annulla in p , deve automaticamente annullarsi anche in q , e viceversa; quindi

$$h^0(C, K(-p-q)) = g-1$$

o anche, per il teorema di Riemann-Roch,

$$h^0(C, \mathcal{O}(p+q)) = 2.$$

Supponiamo invece che l'applicazione canonica non sia una immersione locale in un punto $p \in C$. Scegliamo una base s_0, \dots, s_{g-1} per i differenziali abeliani in modo che s_1, \dots, s_{g-1} si annullino tutti in p . Dato che stiamo supponendo che il differenziale dell'applicazione canonica si annulli in p , essi devono in effetti annullarsi *doppiamente* in p ; se ne deduce che

$$h^0(C, K(-2p)) = g-1, \quad h^0(C, \mathcal{O}(2p)) = 2.$$

In conclusione, se l'applicazione canonica non dà un isomorfismo di C sulla sua immagine, ci sono due punti (distinti o coincidenti) p e q tali che

$$h^0(C, \mathcal{O}(p+q)) = 2.$$

In altre parole, C possiede una g_2^1 o, che è lo stesso, c'è una funzione meromorfa f su C con due soli poli (o con un polo doppio). L'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi_{|\mathcal{O}(p+q)|} : C &\rightarrow \mathbb{P}^1 \\ x &\mapsto [1 : f(x)] \end{aligned}$$

è allora genericamente 2-1, dato che $f-a$, vista come sezione di $\mathcal{O}(p+q)$, ha due zeri (o uno zero doppio) per ogni $a \in \mathbb{C}$; come si suole dire, C è un rivestimento doppio di \mathbb{P}^1 . Una superficie di Riemann compatta e connessa di genere positivo che sia un rivestimento doppio di \mathbb{P}^1 si dice *iperellittica*. Possiamo dunque dire che, a meno che non si abbia a che fare con una superficie di Riemann iperellittica, l'applicazione canonica è un isomorfismo sulla sua immagine; l'immagine della applicazione canonica è allora detta *curva canonica*. Le superficie di Riemann costruite nell'esempio 2.4 sono tutte iperellittiche. Vedremo tra poco che in effetti nell'esempio 2.4 sono state costruite *tutte* le superficie di Riemann iperellittiche. L'analisi della applicazione canonica per queste superficie, che abbiamo appena concluso, mostra allora che per una superficie di Riemann iperellittica C l'applicazione canonica è la composizione di un rivestimento doppio

$$C \rightarrow \mathbb{P}^1$$

e dell'immersione di Veronese

$$\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}.$$

In particolare, dato che l'applicazione canonica è, appunto, canonica, cioè intrinsecamente associata a C , una superficie iperellittica può essere rappresentata in un *unico* modo come rivestimento doppio di \mathbb{P}^1 , a meno naturalmente di automorfismi.

È venuto il momento di discutere una importante formula che mette in relazione il genere di una superficie di Riemann e quello di un suo rivestimento.

4.2. La formula di Riemann-Hurwitz

Siano C e Γ superficie di Riemann compatte e connesse di generi g e γ , e supponiamo che ci sia una applicazione olomorfa non costante

$$f : C \rightarrow \Gamma.$$

Indichiamo con d il grado di f , cioè il numero di punti in una fibra generale $f^{-1}(x)$; diremo che f è un *rivestimento ramificato* a d fogli, o anche che C è un rivestimento (ramificato) a d fogli di Γ . Sia p un punto di C , e poniamo $q = f(p)$; scegliamo coordinate z e w centrate in p e q , rispettivamente. Vicino a p l'applicazione f è data, in queste coordinate, da

$$w = z^n b(z),$$

dove $b(0) \neq 0$. Rimpiazzando la coordinata locale z con la nuova coordinata locale $zh(z)$, dove $h(z)$ è una radice n -esima di $b(z)$, possiamo in effetti supporre che

$$(4.1) \quad w = z^n.$$

Il numero $n - 1$ viene chiamato *indice di ramificazione* di f in p e indicato con r_p . Se $r_p > 0$ diremo che p è un *punto di ramificazione* e q un *punto di diramazione*. È chiaro che i punti di ramificazione di f sono in numero finito. La formula di Riemann-Hurwitz dice allora che

$$(4.2) \quad 2g - 2 = d(2\gamma - 2) + \sum_{p \in C} r_p.$$

Per dimostrarla, indichiamo con ω un differenziale meromorfo non nullo su Γ . Allora se, come al solito, contiamo i poli come zeri di molteplicità negativa, il numero di zeri di ω è $2\gamma - 2$. Possiamo scegliere ω in modo che i suoi zeri e poli non siano punti di diramazione di f . Ora supponiamo che $p \in C$ sia un punto di ramificazione di f , e scegliamo coordinate nelle quali f sia data, vicino a p , da 4.1. In $q = f(p)$ si ha che

$$\omega = a(w)dw, \quad a(0) \neq 0,$$

e quindi

$$f^*(\omega) = a(z^{r_p+1})(r_p + 1)z^{r_p} dz.$$

Dunque $f^*(\omega)$ ha uno zero di molteplicità r_p in p , e il numero totale di zeri di $f^*(\omega)$ è

$$d(2\gamma - 2) + \sum_{p \in C} r_p.$$

Dato che questo numero vale anche $2g - 2$, la formula di Riemann-Hurwitz 4.2 è dimostrata.

Supponiamo ora che C sia iperellittica di genere g . Allora c'è un rivestimento doppio $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1$, e la formula di Riemann-Hurwitz dice che

$$2g - 2 = -4 + r,$$

dove r è il numero di punti di diramazione di f . Quindi f è diramata in $2g+2$ punti $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2g+2}$, e possiamo scegliere coordinate y e $\eta = 1/y$ su \mathbb{P}^1 in modo che nessuno di questi punti sia il punto all'infinito. Allora C è isomorfa alla superficie di Riemann Z di equazione

$$x^2 = \prod_{1 \leq i \leq 2g+2} (y - \zeta_i)$$

(o meglio al suo completamento). Infatti la funzione $\prod (y - \zeta_i)$ ha una radice quadrata x a un solo valore su C e

$$p \mapsto (x(p), y(p))$$

dà un isomorfismo di $C - f^{-1}(\infty)$ su Z che si estende a un isomorfismo di C sul completamento di Z .

4.3. Ogni superficie di Riemann compatta è algebrica

Sia L un fibrato in rette su una superficie di Riemann compatta connessa C ; indichiamo con g il genere di C e con d il grado di L . L'applicazione $\Phi_{|L|}$ è definita se $|L|$ non ha punti base. Questo accade esattamente quando, per ogni $p \in C$, si ha che

$$h^0(C, L(-p)) = h^0(C, L) - 1.$$

Quando $d \geq 2g$ questa uguaglianza è una conseguenza della formula di Riemann-Roch. Segue inoltre dalla nostra discussione della applicazione canonica che $\Phi_{|L|}$ è una immersione quando

$$h^0(C, L(-p-q)) = h^0(C, L) - 2$$

per ogni coppia di punti $p, q \in C$. Questa uguaglianza è di nuovo una conseguenza del teorema di Riemann-Roch quando $d > 2g$. Si conclude dunque che $|L|$ dà sempre una immersione di C in uno spazio proiettivo quando il grado di L è più grande di $2g$; in particolare, ogni superficie di Riemann connessa e compatta può essere realizzata come sottovarietà complessa di qualche spazio proiettivo.

A questo punto potremmo fare appello ad un teorema fondamentale di Chow che afferma che ogni sottovarietà complessa compatta di \mathbb{P}^n è definita da equazioni algebriche omogenee, cioè è una sottovarietà algebrica di \mathbb{P}^n , per concludere che ogni superficie di Riemann compatta è isomorfa ad una curva algebrica. Questo teorema, nel caso di una sottovarietà liscia di \mathbb{P}^n , verrà dimostrato nel Capitolo 10. È tuttavia possibile evitare di ricorrere al teorema di Chow ragionando come segue. Sia C una superficie di Riemann compatta e connessa, che consideriamo immersa in \mathbb{P}^n per mezzo di un sistema lineare $|V|$. In particolare, C non è contenuta in alcun iperpiano. Consideriamo la sottovarietà X di \mathbb{P}^n che è unione di tutte le rette proiettive congiungenti coppie di punti di C (la retta che congiunge un punto a se stesso è la tangente a C in quel punto). La dimensione di X è al più 3, e quindi, se $n \geq 4$, c'è un punto $x \in \mathbb{P}^n$ non contenuto in X . Per la definizione di X , dunque, la proiezione da x manda C isomorficamente sulla sua immagine. Notiamo anche che la proiezione di C da x in \mathbb{P}^{n-1} è data dal sistema lineare $|V'|$, dove V' è il sottospazio di V costituito da tutti gli $s \in V$ tali che il corrispondente iperpiano in

\mathbb{P}^n passi per x . Ripetendo lo stesso procedimento, se necessario, possiamo dunque supporre che $n = 3$. Ora consideriamo le due sottovarietà Y e Z di \mathbb{P}^3 definite come segue: Y è l'unione di tutte le rette tangenti a C , mentre Z è l'unione di tutte le rette passanti per un punto fissato $p \in C$ e per qualche altro punto di C . Sia Y che Z hanno dimensione al più 2, e quindi c'è un punto $x \in \mathbb{P}^3$ che non appartiene a $Y \cup Z$. Ne segue che l'applicazione da C a \mathbb{P}^2 ottenuta per proiezione da x è una immersione locale ed è genericamente 1-1 sulla sua immagine, che indichiamo con Γ . In particolare, ogni punto singolare di Γ è unione di un numero finito di rami lisci. Ora l'applicazione da C a $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ è ottenuta ponendo

$$x_i = s_i, \quad i = 0, 1, 2,$$

dove x_0, x_1, x_2 sono coordinate omogenee e s_0, s_1, s_2 sono sezioni di un fibrato in rette L su C . Per il teorema di Riemann-Roch, per k sufficientemente grande la dimensione di $H^0(C, L^k)$ è un polinomio di primo grado in k ; in particolare, dato che i monomi di grado k in s_0, s_1, s_2 sono sezioni di L^k , la dimensione dello spazio generato da questi monomi è $O(k)$. D'altra parte, la dimensione dello spazio dei monomi di grado k in x_0, x_1, x_2 è $k(k+1)/2$. Ciò implica che, per k abbastanza grande, ci deve essere un polinomio omogeneo $P(x_0, x_1, x_2)$ di grado k tale che $P(s_0, s_1, s_2)$ si annulli identicamente su C ; in altri termini, $P(x_0, x_1, x_2)$ si annulla identicamente su Γ . Dato che C è connessa, uno dei fattori irriducibili di P deve annullarsi identicamente su Γ . Possiamo quindi supporre che P sia irriducibile. Indichiamo con E il luogo degli zeri di P in \mathbb{P}^2 . Dato che P è irriducibile, il complementare del luogo singolare di E (un insieme finito) è connesso. Dunque E è uguale a Γ . Scoppiando ripetutamente i suoi punti singolari, Γ può essere desingularizzata (cf. ??), e la proiezione $C \rightarrow \Gamma$ si solleva a una applicazione suriettiva $\pi : C \rightarrow \hat{\Gamma}$, dove $\hat{\Gamma}$ è la desingularizzazione di Γ . Dato che π è genericamente 1-1, non ha punti di diramazione, quindi è una immersione, quindi un isomorfismo. Dato che $\hat{\Gamma}$ è una sottovarietà algebrica di un opportuno spazio proiettivo, questo conclude la dimostrazione.

4.4. Una versione geometrica del teorema di Riemann-Roch

La formula di Riemann-Roch può essere “letta” nella geometria della applicazione canonica. Per semplicità lo faremo solo per superficie di Riemann compatte e connesse non iperellittiche. Sia dunque C una di queste superficie, e pensiamola immersa in \mathbb{P}^{g-1} per mezzo della applicazione canonica. Una forma lineare su \mathbb{P}^{g-1} corrisponde a un differenziale abeliano su C , quindi il divisore tagliato su C da un iperpiano è il divisore di un differenziale abeliano, e viceversa. Ora sia D un divisore effettivo di grado d su C , e sia $r = \dim |D|$ la dimensione del corrispondente sistema lineare completo. Ci sono esattamente

$$h^0(K(-D)) = r + g - d$$

iperpiani linearmente indipendenti contenenti D , e quindi il sottospazio lineare di \mathbb{P}^{g-1} generato da D , che indichiamo con \overline{D} , ha dimensione

$$(4.3) \quad \dim(\overline{D}) = d - r - 1.$$

In un certo senso, questa è una versione geometrica del teorema di Riemann-Roch. Naturalmente, quando D contiene punti multipli, dobbiamo essere cauti riguardo al significato di “sottospazio lineare generato da D ”. L'interpretazione di questo termine che fa funzionare 4.3 è la seguente. Scriviamo $D = \sum n_i p_i$, dove i p_i sono

distinti; allora il sottospazio generato da D è definito come il sottospazio di \mathbb{P}^{g-1} generato dai sottospazi osculatori di ordine $n_i - 1$ nei punti p_i .

Il teorema di Riemann-Roch, in questa forma geometrica, ha una interessante conseguenza. Si noti che, dato che ci sono esattamente g differenziali abeliani indipendenti su C , la curva canonica non è contenuta in alcun iperpiano. Quindi, se p_1, \dots, p_g sono punti generali su C , essi generano un sottospazio lineare di \mathbb{P}^{g-1} di dimensione $\min(d-1, g-1)$. Questo significa che, per un divisore *effettivo* generale D di grado d , si ha che

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{O}(D)) &= 1 && \text{se } d \leq g, \\ h^0(\mathcal{O}(D)) &= d + 1 - g && \text{se } d \geq g. \end{aligned}$$

Ora sia D' un divisore effettivo generale di grado $d \leq g$, e sia p un punto generale di C . È chiaro che $h^0(\mathcal{O}(D' - p)) = 0$; quindi, se D è un divisore generale di grado d , si ha che

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{O}(D)) &= 0 && \text{se } d < g, \\ h^0(\mathcal{O}(D)) &= d + 1 - g && \text{se } d \geq g. \end{aligned}$$

Si noti che questi sono i valori minimi consentiti dalla formula di Riemann-Roch.

Abbiamo osservato che la formula di Riemann-Roch fornisce una limitazione inferiore per $h^0(\mathcal{O}(D))$ nella regione $0 \leq \deg(D) \leq 2g - 2$, ed abbiamo promesso di dare una limitazione superiore. Questa è fornita dal seguente risultato.

TEOREMA 4.3 (Teorema di Clifford). *Sia C una superficie di Riemann compatta e connessa di genere g , e sia L un fibrato in rette su C il cui grado d sia tale che $0 \leq d \leq 2g - 2$. Poniamo $r = h^0(L) - 1$. Allora*

$$d \geq 2r.$$

Inoltre, se $d = 2r$, vale una delle seguenti alternative:

- i) $L = \mathcal{O}$,
- ii) $L = K$,
- iii) C è iperellittica.

Dimostreremo solo la prima asserzione. Notiamo innanzitutto che non vi è nulla da dimostrare se $r \leq 0$ o se $h^1(L) = 0$. Infatti, nel secondo di questi casi, il teorema di Riemann-Roch dà

$$r = (d-1) - (g-1) \leq (d-1) - \frac{d}{2} < \frac{d}{2}.$$

Nei casi rimanenti ci baseremo sul seguente risultato generale.

LEMMA 4.4. *Sia L un fibrato in rette su C . Allora $h^0(L) \geq h + 1$ se e solo se, per ogni h -upla di punti p_1, \dots, p_h di C , c'è una sezione non nulla $s \in H^0(L)$ tale che $s(p_i) = 0$ per ogni i .*

Per dimostrare ciò, osserviamo innanzitutto che $s(p_1) = s(p_2) = \dots = s(p_h) = 0$ è un sistema di h equazioni lineari in s . Se $h^0(L) \geq h + 1$, ha una soluzione non nulla. Ora mostriamo il viceversa. Sia k la dimensione di $H^0(L)$; dato che, per ipotesi, $k > 0$, c'è un punto p_1 di C dove non tutte le sezioni di L si annullano. Quindi

$$h^0(L(-p_1)) = h^0(L) - 1 = k - 1.$$

Se $h > 0$ possiamo trovare un punto p_2 tale che $h^0(L(-p_1 - p_2)) = h^0(L(-p_1)) - 1$, e così via. Dopo h passi troviamo punti p_1, p_2, \dots, p_h tali che

$$h^0(L(-p_1 - p_2 - \dots - p_h)) = k - h.$$

La nostra ipotesi dice allora che $k - h > 0$, cioè che $h^0(L) \geq h + 1$.

Ora torniamo alla dimostrazione del teorema di Clifford. Poniamo $j = h^1(L) = h^0(KL^{-1})$ e scegliamo punti $p_1, \dots, p_r, \dots, p_{r+j-1}$ su C . Per il lemma 4.4, possiamo trovare sezioni non nulle s di L e t di KL^{-1} tali che s si annulli in p_1, \dots, p_r e t in $p_{r+1}, \dots, p_{r+j-1}$; quindi st è una sezione non nulla di K che si annulla in $p_1, \dots, p_r, \dots, p_{r+j-1}$. Allora, per il lemma 4.4 e per il teorema di Riemann-Roch,

$$g = h^0(K) \geq r + j = r + r + g - d,$$

cioè $2r \leq d$.

Concludiamo questa sezione osservando che i teoremi di Riemann-Roch e Clifford implicano che, nel piano $(d, h^0(L))$ (figura qui sotto), per un valore fissato g del genere, i valori possibili di $(d, h^0(L))$ si trovano solo nella regione ombreggiata e sulle linee più pesanti.

Il teorema di Abel

Nel piano reale con coordinate x, y consideriamo il quadrato

$$S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

All'interno di S disegniamo due dischi concentrici, e chiamiamo D quello interno. Ora sia χ una funzione C^∞ che è identicamente nulla su D , e vale identicamente 1 fuori dal disco più grande.

Sia poi T il toro ottenuto identificando lati opposti di S , e siano γ e η i cammini chiusi in T che sono immagini dei lati $\{y = 0\}$ e $\{x = 0\}$ di S , orientati nel verso delle x e delle y crescenti. Allora

$$\int_S d(\chi x) \wedge d(\chi y) = \int_S d(\chi x d(\chi y)) = \int_{\partial S} \chi x d(\chi y) = \int_{\partial S} x dy = \int_S dx \wedge dy = 1.$$

Ora i differenziali $d(\chi x)$ e $d(\chi y)$ inducono differenziali α e β su T , e il calcolo precedente mostra che

$$(5.1) \quad \int_T \alpha \wedge \beta = 1.$$

Si noti anche che α e β si annullano su D . Inoltre

$$(5.2) \quad \int_\gamma \alpha = \int_\eta \beta = 1; \quad \int_\eta \alpha = \int_\gamma \beta = 0.$$

Ora consideriamo una superficie di Riemann compatta e connessa C di genere g . Dal punto di vista differenziale, non è altro che una sfera con attaccati g manici, che numeriamo da 1 a g . Ogni manico è diffeomorfo al toro T meno il disco D (figura qui sotto). Quindi, per ogni i , i differenziali α e β inducono differenziali sull' i -esimo manico, che possono essere estesi a zero sul resto di C ; indichiamo con α_i e β_i i differenziali su C che ne risultano. Inoltre, siano γ_i e η_i le immagini di γ e η sull' i -esimo manico.

La formula 5.1 dice allora che

$$(5.3) \quad \int_C \alpha_i \wedge \beta_j = \delta_{ij}; \quad \int_C \alpha_i \wedge \alpha_j = \int_C \beta_i \wedge \beta_j = 0,$$

mentre la 5.2 dice che

$$(5.4) \quad \int_{\gamma_i} \alpha_j = \int_{\eta_i} \beta_j = 1; \quad \int_{\eta_i} \alpha_j = \int_{\gamma_i} \beta_j = 0.$$

Le classi dei lacci $\gamma_1, \dots, \gamma_g, \eta_1, \dots, \eta_g$, che indicheremo, per abuso di linguaggio, con gli stessi simboli, costituiscono una base del gruppo di omologia intera $H_1(C, \mathbb{Z})$. Per ogni 1-forma d -chiusa φ su C indichiamo con $[\varphi]$ la corrispondente classe in $H^1(C, \mathbb{C})$. Definiamo il primo gruppo di coomologia intero di C come

$$H^1(C, \mathbb{Z}) = \{[\varphi] \in H^1(C, \mathbb{C}) : \int_\gamma \varphi \in \mathbb{Z} \text{ per ogni } \gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})\}.$$

Ciò è naturalmente giustificato dal fatto che $H^1(C, \mathbb{Z})$, come qui definito, corrisponde esattamente, via l'isomorfismo di de Rham, alla consueta coomologia intera; di questo non avremo tuttavia bisogno. È chiaro che una classe $[\varphi]$ appartiene a $H^1(C, \mathbb{Z})$ se e solo se il suo integrale su ognuno dei lacci base γ_i , η_i è un intero.

Le formule 5.4 dicono che la base $[\alpha_1], \dots, [\alpha_g], [\beta_1], \dots, [\beta_g]$ di $H^1(C, \mathbb{Z})$ è la base duale di $\gamma_1, \dots, \gamma_g, \eta_1, \dots, \eta_g$. D'altra parte la 5.3 dice che, rispetto alla base $[\alpha_1], \dots, [\alpha_g], [\beta_1], \dots, [\beta_g]$, la matrice della forma di intersezione

$$\langle [\varphi], [\psi] \rangle = \int_C \varphi \wedge \psi$$

è

$$\begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix},$$

dove I_g è la matrice identità $g \times g$. In particolare la forma di intersezione è unimodulare sulla coomologia intera di C , cosicché la formula

$$(5.5) \quad \int_{\gamma} \varphi = \langle P(\gamma), [\varphi] \rangle$$

definisce un *isomorfismo*

$$P : H_1(C, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(C, \mathbb{Z}).$$

Questa è, nel nostro contesto, la *dualità di Poincaré*. Si noti che

$$P(\eta_i) = [\alpha_i], \quad P(\gamma_i) = -[\beta_i].$$

Veniamo al teorema di Abel. Indichiamo con $\text{Div}_0(C)$ il gruppo dei divisori di grado zero su C , con $\text{Pic}(C)$ il gruppo delle classi di isomorfismo di fibrati in rette su C , e con $\text{Pic}_0(C)$ il gruppo delle classi di isomorfismo di fibrati in rette di grado zero. L'applicazione $D \mapsto \mathcal{O}(D)$ è un omomorfismo da $\text{Div}_0(C)$ a $\text{Pic}_0(C)$. Definiamo anche la *varietà Jacobiana* di C come il quoziente

$$J(C) = H^0(C, K)^\vee / j(H_1(C, \mathbb{Z})),$$

dove $^\vee$ indica spazio vettoriale duale e j associa a ogni $\gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})$ il funzionale di integrazione

$$\omega \mapsto \int_{\gamma} \omega.$$

Definiamo un omomorfismo

$$u : \text{Div}_0(C) \rightarrow J(C)$$

ponendo

$$u(\sum p_i - \sum q_i) = \sum \int_{q_i}^{p_i}.$$

L'apparente ambiguità causata dalla arbitrarietà della scelta di cammini di integrazione dai q_i ai p_i è esattamente compensata dal fatto che stiamo quozientando modulo gli integrali sui cammini chiusi. Se scegliamo una base $\omega_1, \dots, \omega_g$ per i differenziali abeliani, la Jacobiana e l'omomorfismo u possono essere descritti in modo più concreto come segue.

$$J(C) = \mathbb{C}^g / \Lambda, \quad \Lambda = \{(\int_{\gamma} \omega_1, \dots, \int_{\gamma} \omega_g) : \gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})\},$$

$$u(\sum p_i - \sum q_i) = \left(\sum_i \int_{q_i}^{p_i} \omega_1, \dots, \sum_i \int_{q_i}^{p_i} \omega_g \right).$$

TEOREMA 5.1 (Teorema di Abel). *C'è un isomorfismo $\xi : \text{Pic}_0(C) \rightarrow J(C)$ che rende commutativo il diagramma*

$$(5.6) \quad \begin{array}{ccc} & & \text{Pic}_0(C) \\ & \nearrow \mathcal{O}(\cdot) & \downarrow \xi \\ \text{Div}_0(C) & \xrightarrow{u} & J(C) \end{array}$$

La strategia della dimostrazione è la seguente. Innanzitutto osserviamo che c'è un isomorfismo

$$(5.7) \quad \text{Pic}_0(C) \simeq H^1(C, \mathcal{O})/H^1(C, \mathbb{Z}).$$

Questo segue, naturalmente, dalla successione esatta lunga di coomologia associata alla successione esponenziale di fasci

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp(2\pi\sqrt{-1}\cdot)} \mathcal{O}^\times \rightarrow 0,$$

cioè da

$$\dots \rightarrow H^1(C, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}^\times) = \text{Pic}(C) \xrightarrow{\text{deg}} H^2(C, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Tuttavia, dato che non abbiamo finora usato alcun macchinario coomologico, ma solo forme differenziali, daremo una descrizione diretta dell'isomorfismo 5.7 che non fa uso esplicito della successione esponenziale. Per farlo, sia φ una forma differenziale di tipo $(0, 1)$; possiamo trovare un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di C e funzioni u_α tali che

$$\varphi = \bar{\partial}u_\alpha \quad \text{su } U_\alpha.$$

In particolare, $u_\beta - u_\alpha$ è olomorfa. Poniamo allora

$$g_{\alpha\beta} = \exp(2\pi\sqrt{-1}(u_\beta - u_\alpha)).$$

È chiaro che le $g_{\alpha\beta}$ soddisfano la condizione di cociclo, e quindi sono funzioni di transizione per un fibrato in rette L . È anche immediato verificare che la classe di isomorfismo di L non dipende dalla scelta del ricoprimento e delle u_α ; in particolare, se $\varphi = \bar{\partial}u$ su tutta C , cioè se φ rappresenta zero in $H^1(C, \mathcal{O})$, allora L è banale. Abbiamo dunque un omomorfismo ben definito

$$f : H^1(C, \mathcal{O}) \rightarrow \text{Pic}(C);$$

dobbiamo mostrare che:

- i) l'immagine di f è contenuta in $\text{Pic}_0(C)$,
- ii) f manda $H^1(C, \mathcal{O})$ suriettivamente su $\text{Pic}_0(C)$,
- iii) il nucleo di f è $H^1(C, \mathbb{Z})$.

Dimostreremo ii) e in seguito, supponendo dimostrati i) e iii), il teorema di Abel. Da ultimo dimostreremo i) e iii).

Consideriamo dunque un fibrato in rette L di grado zero, cioè della forma $L = \mathcal{O}(\sum(p_i - q_i))$. Vogliamo mostrare che è nell'immagine di f . Per linearità basterà farlo quando $L = \mathcal{O}(p - q)$. Inoltre, sempre per linearità, possiamo supporre che p e q siano "molto vicini", nel senso che c'è un disco coordinato U con coordinata z tale che $p, q \in U$, $z(q) = 0$, $z(p) = 1$. La funzione $\log\left(\frac{z-1}{z}\right)$ ha una determinazione a un valore nel complementare del segmento che unisce p a q . Ora sia χ una funzione C^∞ su C che è identicamente uguale a 1 su un intorno V del segmento \overline{pq} e identicamente nulla fuori di un intorno chiuso e contenuto in U del segmento \overline{pq} .

La forma differenziale

$$(5.8) \quad \varphi = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \bar{\partial} \left(\chi \log \left(\frac{z-1}{z} \right) \right),$$

estesa a zero fuori di U e attraverso il segmento \overline{pq} , è allora una forma C^∞ di tipo $(0,1)$ su C . Dico che la sua immagine via f è $\mathcal{O}(p-q)$. In effetti, consideriamo il ricoprimento $\{V, W\}$ di C , dove $W = C - \overline{pq}$. Una equazione locale per $p-q$ in W è 1, mentre una equazione locale in V è $(z-1)/z$. Quindi

$$g_{VW} = \frac{z-1}{z}$$

è la funzione di transizione per $\mathcal{O}(p-q)$. D'altra parte

$$\begin{aligned} \bar{\partial} 0 &= \varphi && \text{su } V, \\ \bar{\partial} \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \chi \log \left(\frac{z-1}{z} \right) \right) &= \varphi && \text{su } W, \end{aligned}$$

quindi la classe di φ in $H^1(C, \mathcal{O})$ ha come immagine via f un fibrato in rette con funzione di transizione

$$\gamma_{VW} = \exp \left(2\pi\sqrt{-1} \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \chi \log \left(\frac{z-1}{z} \right) - 0 \right) \right) = \frac{z-1}{z},$$

cioè $\mathcal{O}(p-q)$.

Supponendo di aver mostrato che $\text{Pic}_0(C) \simeq H^1(C, \mathcal{O})/H^1(C, \mathbb{Z})$, definiamo ξ e dimostriamo il teorema di Abel. Supponiamo che il fibrato in rette L provenga da una $(0,1)$ -forma ψ . Sia allora $\xi(L)$ la classe del funzionale lineare

$$\omega \mapsto - \int_C \psi \wedge \omega.$$

Se $[\psi]$ proviene da $H^1(C, \mathbb{Z})$, cioè se la classe di $\psi + \bar{\psi}$ è intera, allora, per dualità di Poincaré, $[\psi + \bar{\psi}]$ è uguale a $P(\gamma)$, per qualche classe γ in $H_1(C, \mathbb{Z})$, e quindi

$$(5.9) \quad \int_C \psi \wedge \omega = \int_C (\psi + \bar{\psi}) \wedge \omega = \int_C P(\gamma) \wedge \omega = \int_\gamma \omega.$$

Dunque ξ è un omomorfismo ben definito da $\text{Pic}_0(C)$ a $J(C)$. Per mostrare che ξ è iniettivo supponiamo che l'identità 5.9 sia soddisfatta per ogni differenziale abeliano ω . Allora, dato che $\psi + \bar{\psi}$ è reale,

$$\int_C (\psi + \bar{\psi}) \wedge \bar{\omega} = \int_\gamma \bar{\omega}$$

per ogni ω . Dato che i differenziali abeliani e i loro coniugati generano $H^1(C, \mathbb{C})$, questo mostra che $[\psi + \bar{\psi}] = P(\gamma)$.

Per concludere la dimostrazione del teorema di Abel basta ora mostrare che

$$\xi(\mathcal{O}(D)) = u(D)$$

per ogni divisore di grado zero D . Per linearità, possiamo supporre che $D = p - q$, dove p e q sono "molto vicini", cosicché $\mathcal{O}(D)$ proviene dalla forma differenziale φ data dalla formula 5.8. Sia α un laccio intorno a \overline{pq} , orientato in verso orario. Per

ogni differenziale abeliano ω ,

$$\begin{aligned} 2\pi\sqrt{-1} \int_C \varphi \wedge \omega &= \int_C d \left(\chi \log \left(\frac{z-1}{z} \right) \omega \right) \\ &= \int_\alpha \log \left(\frac{z-1}{z} \right) \omega \\ &= \int_0^1 \log \left(\frac{z-1}{z} \right)_{sup} \omega - \int_0^1 \log \left(\frac{z-1}{z} \right)_{inf} \omega, \end{aligned}$$

dove $\log((z-1)/z)_{sup}$ e $\log((z-1)/z)_{inf}$ sono le determinazioni superiore e inferiore di $\log((z-1)/z)$ lungo \overline{pq} . Visto che la differenza tra queste due determinazioni è $2\pi\sqrt{-1}$, otteniamo

$$2\pi\sqrt{-1} \int_C \varphi \wedge \omega = \int_0^1 2\pi\sqrt{-1} \omega = 2\pi\sqrt{-1} \int_q^p \omega.$$

Ciò dice esattamente che $\xi(\mathcal{O}(p-q)) = u(p-q)$.

Abbiamo dimostrato il teorema di Abel supponendo di aver mostrato che $\text{Pic}_0(C) \simeq H^1(C, \mathcal{O})/H^1(C, \mathbb{Z})$. Abbiamo già dato una ricetta per costruire un fibrato in rette a partire da una classe in $H^1(C, \mathcal{O})$, e abbiamo mostrato che ogni fibrato in rette di grado zero può essere così ottenuto. Ora supponiamo che il fibrato in rette L provenga da una $(0, 1)$ -forma φ . Vogliamo mostrare che L ha grado zero. Possiamo supporre che φ sia la coniugata di un differenziale abeliano, e sia quindi chiusa. Fissiamo un punto base q e poniamo

$$u(x) = \int_q^x \varphi.$$

Questa è una “funzione” a più valori; il suo valore in x dipende solo dalla classe di omotopia del cammino usato per congiungere q a x , e due sue determinazioni differiscono per una costante, cioè per l’integrale di φ su un opportuno cammino chiuso. Dato che $\bar{\partial}u = \varphi$, il fibrato L ha funzioni di transizione della forma

$$g_{\alpha\beta} = \exp(2\pi\sqrt{-1}(u_\beta - u_\alpha)),$$

dove u_α e u_β sono determinazioni di u . Quindi L ha funzioni di transizione costanti. Inoltre, dato che $\bar{u}_\alpha = \int \varphi$ è olomorfa, un sistema equivalente di funzioni di transizione è dato dalle

$$(5.10) \quad h_{\alpha\beta} = \exp(2\pi\sqrt{-1}(u_\beta + \bar{u}_\beta - u_\alpha - \bar{u}_\alpha)) = \exp(2\pi\sqrt{-1} \int_\gamma (\varphi + \bar{\varphi})),$$

dove γ è un opportuno cammino chiuso. Queste funzioni di transizione sono *costanti di valore assoluto 1*. Ora sia $s = \{s_\alpha\}$ una sezione meromorfa di L . Allora $d \log(s_\alpha)$ è un differenziale meromorfo globalmente definito su C , quindi la somma dei suoi residui è zero. Poiché questa somma non è altro che il grado di L , abbiamo mostrato quanto volevamo.

È chiaro dalla formula 5.10 che L è banale se la classe di $\varphi + \bar{\varphi}$ è intera. Resta da mostrare che è vero anche il viceversa. Supponiamo che L abbia una sezione olomorfa non nulla $s = \{s_\alpha\}$. Passando ai valori assoluti in $s_\alpha = h_{\alpha\beta} s_\beta$ concludiamo che $|s_\alpha| = |s_\beta|$, cosicché, per il principio del massimo per le funzioni olomorfe, s_α deve essere costante per ogni α . Quindi, se γ è un cammino chiuso con estremi in q , e $h_{\alpha\beta}$ è data dalla 5.10, per continuazione analitica lungo γ otteniamo che

$s_\alpha(q) = s_\beta(q)$. Dato che $s_\alpha = h_{\alpha\beta}s_\beta$, ne deduciamo che $h_{\alpha\beta} = 1$. Ciò significa che

$$\int_\gamma (\varphi + \bar{\varphi}) \in \mathbb{Z}$$

per ogni γ , cioè che $[\varphi + \bar{\varphi}]$ è una classe intera. La dimostrazione del teorema di Abel è ora completa.

Concludiamo con due osservazioni. Se indichiamo con $H^1(C, \mathbb{R})$ il sottogruppo di $H^1(C, \mathbb{C})$ che consiste delle classi di 1-forme reali, allora $H^1(C, \mathbb{Z})$ è un reticolo in $H^1(C, \mathbb{R})$, cioè un sottogruppo abeliano di rango massimo; ciò segue, ad esempio, dalle relazioni di intersezione 5.3. D'altra parte la proiezione $H^1(C, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(C, \mathcal{O})$ è un isomorfismo di spazi vettoriali *reali*. Infatti i due spazi hanno la stessa dimensione e ogni elemento di $H^1(C, \mathcal{O})$ è la classe del coniugato di un differenziale abeliano ω , e quindi $\omega + \bar{\omega}$ è una 1-forma reale d -chiusa la cui classe ha come immagine la classe di $\bar{\omega}$ in $H^1(C, \mathcal{O})$. Quindi $\text{Pic}_0(C) = J(C) = H^1(C, \mathcal{O})/H^1(C, \mathbb{Z})$ è un toro complesso di dimensione g ; in effetti, è una varietà abeliana principalmente polarizzata, come vedremo più avanti.

Ora supponiamo che $g > 0$, e scegliamo un punto base $q \in C$, insieme a una base $\omega_1, \dots, \omega_g$ per lo spazio dei differenziali abeliani. Per il teorema di Abel l'*applicazione di Abel-Jacobi*

$$\begin{aligned} \psi_q : C &\rightarrow J(C), \\ \psi_q(p) &= \left(\int_q^p \omega_1, \dots, \int_q^p \omega_g \right), \end{aligned}$$

è iniettiva. Poiché il sistema lineare $|K_C|$ non ha punti base, è anche una immersione locale. In particolare, quando $g = 1$ se ne deduce che C è isomorfa a $J(C)$.

L'operatore di Laplace sulle superficie di Riemann

In questo capitolo abbiamo raccolto alcuni risultati sull'operatore di Laplace su una superficie di Riemann. In particolare, diamo una dimostrazione del teorema fondamentale 2.5.

6.1. Il principio del massimo per le funzioni armoniche

Sia $u(z)$ una funzione armonica su un intorno di $0 \in \mathbb{C}$; osserviamo che sia la parte reale che la parte immaginaria di u sono armoniche. Si ha che

$$0 = \int_{|z| \leq \varepsilon} \partial \bar{\partial} u = \int_{|z| \leq \varepsilon} d(\bar{\partial} u) = \int_{|z| = \varepsilon} \bar{\partial} u.$$

Usando ciò e il teorema di Stokes si trova che

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\alpha \leq |z| \leq \beta} \partial \bar{\partial}(u) \log |z|^2 \\ (6.1) \quad &= \int_{|z| = \beta} \bar{\partial} u \log |\beta|^2 - \int_{|z| = \alpha} \bar{\partial} u \log |\alpha|^2 + \int_{\alpha \leq |z| \leq \beta} \bar{\partial} u \wedge \partial(\log |z|^2) \\ &= \int_{\alpha \leq |z| \leq \beta} \bar{\partial} u \wedge \partial(\log |z|^2) = \int_{|z| = \beta} u \partial(\log |z|^2) - \int_{|z| = \alpha} u \partial(\log |z|^2), \end{aligned}$$

dato che $\log |z|^2$ è armonica. D'altro canto, se scriviamo $z = re^{\sqrt{-1}\vartheta}$,

$$\partial \log |z|^2 = \frac{\bar{z} dz}{|z|^2} = \sqrt{-1} d\vartheta \quad \text{su } |z| = r,$$

e quindi

$$\int_0^{2\pi} u \left(re^{\sqrt{-1}\vartheta} \right) d\vartheta$$

è *indipendente* da r e quindi, per continuità, uguale a $2\pi u(0)$.

Supponiamo ora che u sia a valori reali e che abbia un massimo nell'origine. Dico che u è costante su un intorno di 0. Infatti, dato che l'integrando di

$$\int_0^{2\pi} \left(u(0) - u \left(re^{\sqrt{-1}\vartheta} \right) \right) d\vartheta = 2\pi u(0) - \int_0^{2\pi} u \left(re^{\sqrt{-1}\vartheta} \right) d\vartheta = 0$$

è continuo e non negativo, deve essere identicamente nullo per ogni r .

Ora sia u una funzione armonica su una superficie di Riemann compatta e connessa C . Poiché C è compatta, sia la parte reale che quella immaginaria di u hanno un massimo. Come si è appena mostrato, il luogo dove questo massimo è raggiunto è aperto; dato che è anche chiuso, e C è connessa, u deve essere costante.

6.2. Una dimostrazione del teorema 2.5

Sia C una superficie di Riemann compatta e connessa. Scegliamo, una volta per tutte, una forma di volume Φ su C e un ricoprimento finito $\{U_i\}$ di C con dischi coordinati; sia z_i una coordinata su U_i . Restringendo leggermente gli U_i , se necessario, possiamo supporre che i cambiamenti di coordinate e le loro derivate di ogni ordine siano funzioni limitate. Qui e nel seguito, quando parliamo di derivate di una funzione su C , intendiamo derivate rispetto alle coordinate z_i . Possiamo anche supporre, riscalandolo se necessario le z_i , che per ogni $p \in C$ via sia un indice i tale che il disco $|z_i - z_i(p)| \leq 2$ sia contenuto in U_i . Indichiamo la composizione di z_i con la proiezione sul secondo fattore di $C \times C$ con w_i , e la composizione con la proiezione sul primo fattore ancora con z_i . La diagonale in $C \times C$ è ricoperta dagli aperti $U_i \times U_i$, e (z_i, w_i) è un sistema di coordinate locali su $U_i \times U_i$. Per ogni intero positivo n sia $E_{i,n}$ la regione $\{|z_i - w_i| \leq 1/n\}$, e scegliamo funzioni lisce $\lambda_{i,n}$ su $C \times C$ tali che

- $0 \leq \lambda_{i,n}$,
- $\lambda_{i,n}(p, q) = \lambda_{i,n}(q, p)$,
- il supporto di $\lambda_{i,n}$ è contenuto in $U_i \times U_i$,
- $\sum_i \lambda_{i,n} \equiv 1$ su un intorno della diagonale,
- $\sum_i \lambda_{i,n} \equiv 0$ su $U_i \times U_i - E_{i,n}$
- $\sum_i \lambda_{i,n} \leq 1$.

Poniamo allora

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \tilde{h}_n(p, q) &= \sum_i \lambda_{i,n}(p, q) |z_i - w_i|^2 + \left(1 - \sum_i \lambda_{i,n}(p, q)\right), \\ h_n(p, q) &= \log(\tilde{h}_n(p, q)) \quad \text{se } p \neq q. \end{aligned}$$

La funzione h_n ha le seguenti proprietà:

$$(6.3) \quad h_n(p, q) = h_n(q, p),$$

$$(6.4) \quad h_n(p, q) \leq 0,$$

$$(6.5) \quad \text{supp}(h_n(p, q)) \subset \bigcup U_i \times U_i, \quad h_n(p, q) \equiv 0 \text{ in } U_i \times U_i - E_{i,n},$$

$$(6.6) \quad \text{su } U_i \times U_i, \quad h_n(p, q) = \log |z_i - w_i|^2 + \text{una funzione liscia.}$$

Poniamo anche

$$k_n(p, q) = \partial_1 \bar{\partial}_1 h_n(p, q).$$

Qui e nel seguito l'indice 1 (risp., 2) indica differenziazione rispetto alle coordinate z_i (risp., alle coordinate w_i). Si osservi che, per la 6.6, k_n si estende in modo liscio alla diagonale.

Indicheremo con L_2 lo spazio delle funzioni a quadrato sommabile su C con il prodotto interno

$$(f, g) = \int_C f \bar{g} \Phi.$$

Con il simbolo $\|f\|$ indicheremo la norma di f rispetto a questo prodotto interno. Definiamo operatori continui

$$H_n : L_2 \rightarrow L_2$$

$$K_n : L_2 \rightarrow L_2$$

ponendo

$$H_n f(p) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{q \in C} h_n(p, q) f(q) \Phi(q),$$

$$K_n f(p) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}\Phi(p)} \int_{q \in C} k_n(p, q) f(q) \Phi(q).$$

Si osservi che, dato che $k_n(p, q)$ è liscia, $K_n f$ può essere indefinitamente differenziata sotto il segno di integrale, ed è quindi una funzione C^∞ per ogni $f \in L_2$. Lo stesso è vero per l'aggiunto di K_n , che indichiamo con K_n^* ed è dato da

$$K_n^* f(q) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{p \in C} \overline{k_n(p, q)} f(p).$$

L'operatore H_n , d'altro canto, porta funzioni C^∞ in funzioni C^∞ . Per dimostrarlo, scegliamo una partizione dell'unità liscia $\{\chi_i\}$. Se $H_n(\chi_i u)$ è liscia per ogni i , allora $H_n(u)$ è liscia, per linearità. Scegliendo una partizione dell'unità sufficientemente fine, possiamo dunque ridurci al caso in cui il supporto di u è "piccolo". Con questo vogliamo dire che c'è un i tale che il supporto di u è contenuto in U_i e, per ogni $p \in \text{supp}(u)$, il disco $|z_i - z_i(p)| \leq 1$ è contenuto in U_i . Questo ci permetterà di effettuare tutti i calcoli in $U_i \times U_i$, nelle variabili z_i e w_i . In effetti, nella situazione alla quale ci siamo ridotti, $H_n u$ (e anche $K_n u$) si annullano fuori di U_i . Dato che lavoreremo in $U_i \times U_i$, ometteremo l'indice i e scriveremo z e w per z_i e w_i . Scriveremo anche h e k invece di h_n e k_n . Come si è osservato, in $U_i \times U_i$ si ha che

$$h(z, w) = g(z, w) + \log |z - w|^2,$$

dove g è una funzione C^∞ . Ciò che dobbiamo mostrare è che

$$\int_C \log(|z - w|^2) v(w) dw \wedge d\bar{w}$$

è una funzione C^∞ di z per ogni funzione liscia v con supporto "piccolo". In primo luogo questa funzione è certamente continua. Una integrazione per parti dà

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \int \log(|z - w|^2) v(w) dw \wedge d\bar{w} &= - \int \frac{1}{w - z} v(w) dw \wedge d\bar{w} \\ &= - \int \frac{\partial}{\partial w} \log(|z - w|^2) v(w) dw \wedge d\bar{w} = \int \log(|z - w|^2) \frac{\partial v}{\partial w}(w) dw \wedge d\bar{w}. \end{aligned}$$

Una formula simile vale per la derivata rispetto a \bar{z} . Ciò che affermano le formule è che, se $\int \log(|z - w|^2) v(w) dw \wedge d\bar{w}$ è C^s per ogni funzione liscia v con supporto "piccolo", allora è anche C^{s+1} ; l'inevitabile conclusione è che deve anche essere C^∞ .

Sia L l'operatore differenziale definito da

$$Lu = \frac{\partial \bar{\partial} u}{\Phi}.$$

Dico che, per ogni funzione liscia u , si ha che

$$(6.7) \quad LH_n u = K_n u - u.$$

La dimostrazione è un semplice calcolo di residui. Per linearità basterà fare la dimostrazione quando u ha supporto "piccolo". Quindi adotteremo tutte le convenzioni

usate nel mostrare che $H_n u$ è C^∞ quando u lo è. Come abbiamo osservato, in $U_i \times U_i$ si ha che

$$h(z, w) = g(z, w) + \log(|z - w|^2),$$

$$k(z, w) = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z},$$

dove g è C^∞ . Ora, per ogni funzione liscia v con supporto “piccolo” e contenuto in U_i , si ha che

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \left(\int h(z, w) v(w) dw \wedge d\bar{w} \right) \\ &= \int \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \bar{z}}(z, w) v(w) dw \wedge d\bar{w} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \left(\int \log(|z - w|^2) v(w) dw \wedge d\bar{w} \right) \end{aligned}$$

D'altra parte si è visto che

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int \log(|z - w|^2) v(w) dw \wedge d\bar{w} = \int \log(|z - w|^2) \frac{\partial v}{\partial \bar{w}}(w) dw \wedge d\bar{w},$$

cosicché, indicando con D_r il disco di raggio r centrato in z ,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \int \log(|z - w|^2) v(w) dw \wedge d\bar{w} = - \int \frac{1}{w - z} \frac{\partial v}{\partial \bar{w}}(w) dw \wedge d\bar{w} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{U_i - D_r} d \left(\frac{v(w)}{w - z} dw \right) = - \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial D_r} v(w) \frac{dw}{w - z} = -2\pi \sqrt{-1} v(z). \end{aligned}$$

In conclusione

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \left(\int h(z, w) v(w) dw \wedge d\bar{w} \right) = \int \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \bar{z}}(z, w) v(w) dw \wedge d\bar{w} - 2\pi \sqrt{-1} v(z).$$

Ponendo $v(w) dw \wedge d\bar{w} = u(w) \Phi(w)$, questa uguaglianza si traduce in

$$\partial \bar{\partial} H_n u = \Phi K_n u - \Phi u,$$

che è precisamente quanto andava dimostrato.

Siamo ora pronti a dimostrare il teorema 2.5. La dimostrazione usa due semplici risultati di analisi funzionale. Il primo è

FATTO 6.1. *Uno spazio vettoriale complesso normato è localmente compatto se e solo se ha dimensione finita.*

Il secondo è il teorema di Ascoli nella seguente versione.

FATTO 6.2. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni C^1 su C . Supponiamo che le f_n e le loro derivate prime siano uniformemente limitate. Allora $\{f_n\}$ ha una sottosuccessione uniformemente convergente.*

Segue dal fatto 6.2 che K_n è un operatore compatto, cioè che trasforma successioni limitate in L_2 in successioni con una sottosuccessione convergente. Supponiamo infatti che $\{f_h\}$ sia una successione limitata in L_2 . Allora la limitatezza di k_n e delle sue derivate prime, più la disuguaglianza di Schwarz, mostra che le funzioni (lisce) $K_n f_h$ e le loro derivate prime sono limitate uniformemente in h . Dunque una sottosuccessione di $\{K_n f_h\}$ converge uniformemente, e quindi in L_2 . L'aggiunto di K_n è anch'esso compatto. Questo segue dalla teoria generale degli operatori compatti o, più direttamente, da un ragionamento simile a quello usato per K_n .

Una conseguenza è che i nuclei di $K_n - \mathbf{1}$ e di $K_n^* - \mathbf{1}$ hanno dimensione finita e consistono interamente di funzioni C^∞ . Mostriamolo per $K_n - \mathbf{1}$. In primo luogo, se

$$K_n u - u = 0,$$

allora u è C^∞ dato che lo è $K_n u$. In secondo luogo, se la successione $\{u_h\}$ è limitata e $u_h \in \ker(K_n - \mathbf{1})$ per ogni h , allora la successione $\{K_n u_h\} = \{u_h\}$ ha una sottosuccessione convergente e quindi, per il fatto 6.1, il nucleo di $K_n - \mathbf{1}$ ha dimensione finita.

Osserviamo poi che

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \ker(K_n^* - \mathbf{1}) = \{\text{funzioni costanti}\}.$$

Supponiamo infatti che $K_n^* u = u$ per ogni n (dal che segue, in particolare, che u è C^∞). Allora

$$0 = K_n^* u - u = H_n^* L^* u = H_n L u.$$

Se u non è costante, allora $v = Lu$ non è nulla, e quindi c'è un punto p dove $v(p) \neq 0$. Scegliamo un intorno V di p dove v non cambi segno. Allora, per n abbastanza grande, $h_n(p, q) = 0$ se $q \notin V$, e quindi, in virtù di 6.4,

$$H_n v(p) = \int_V h_n(p, q) v(q) \Phi(q) \neq 0,$$

in contraddizione con quanto supposto.

Poiché il nucleo di $K_n^* - \mathbf{1}$ ha dimensione finita, per n grande si ha che

$$\ker(K_1^* - \mathbf{1}) \cap \dots \cap \ker(K_n^* - \mathbf{1}) = \{\text{funzioni costanti}\}.$$

Quindi, se $\int f \Phi = 0$, cioè se $(f, \mathbf{1}) = 0$, possiamo scrivere

$$\begin{array}{ll} f = f_1 + f'_1 & f_1 \perp \ker(K_1^* - \mathbf{1}), \quad f'_1 \in \ker(K_1^* - \mathbf{1}), \\ f'_1 = f_2 + f'_2 & f_2 \perp \ker(K_2^* - \mathbf{1}), \quad f'_2 \in \ker(K_1^* - \mathbf{1}) \cap \ker(K_2^* - \mathbf{1}), \\ \dots & \dots \\ f'_{n-1} = f_n & f_n \perp \ker(K_n^* - \mathbf{1}). \end{array}$$

Dunque $f = \sum f_i$. Inoltre, se f è C^∞ , lo è anche f_i per ogni i . Ora supponiamo di poter risolvere

$$(6.8) \quad (K_i - \mathbf{1})v_i = f_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Se f è C^∞ , lo è anche v_i , dato che $K_i v_i$ è C^∞ per ogni i . Inoltre

$$LH_i v_i = K_i v_i - v_i = f_i,$$

per cui

$$L(\sum H_i v_i) = \sum f_i = f.$$

Una soluzione di $Lu = f$ è dunque data dalla funzione liscia $\sum H_i v_i$.

Resta da risolvere il sistema 6.8, il che equivale a mostrare che, ponendo $R = K_i - \mathbf{1}$, l'equazione $Rv = f$ ammette soluzione ogniqualvolta f è ortogonale a $\ker(R^*)$. Questo è standard. Dico innanzitutto che, se $\alpha \perp \ker(R^*)$, allora c'è una costante positiva N tale che

$$\|\alpha\| \leq N \|R^* \alpha\|.$$

In caso contrario, infatti, ci sarebbe una successione α_j tale che

$$\|\alpha_j\| = 1, \quad \alpha_j \perp \ker(R^*), \quad \|R^* \alpha_j\| \rightarrow 0.$$

Poiché K_i^* è compatto, passando a una sottosuccessione, $K_i^* \alpha_j = \alpha_j$ convergerebbe a una funzione β ; ne seguirebbe che $\|\beta\| = 1$, ma anche che $R^* \beta = 0$ e $\beta \perp \ker(R^*)$, e quindi $\beta = 0$, il che è contraddittorio. Ora si consideri il funzionale

$$\begin{aligned} R^*(L_2) &\rightarrow \mathbb{C} \\ R^* \alpha &\mapsto (\alpha, f), \quad \alpha \perp \ker(R^*). \end{aligned}$$

Le disuguaglianze

$$|(\alpha, f)| \leq \|f\| \|\alpha\| \leq N \|f\| \|R^* \alpha\|$$

mostrano che questo funzionale è continuo e quindi, per il teorema di rappresentazione di Riesz, c'è un v nella chiusura di $R^* L_2$ tale che

$$(\alpha, f) = (R^* \alpha, v)$$

ogniqualevolta $\alpha \perp \ker(R^*)$. Dato che questa uguaglianza è verificata per ipotesi quando $\alpha \in \ker(R^*)$, si conclude che $f = Rv$.

Abbiamo mostrato che $Lu = f$ è risolubile quando $\int f \Phi = 0$. Dunque l'equazione $\partial \bar{\partial} u = \varphi$ è risolubile quando $\int \varphi = \int (\varphi/\Phi) \Phi = 0$. La dimostrazione del teorema 2.5 è conclusa.

6.3. La finitezza di $h^1(L)$

Sia L un fibrato in rette olomorfo su una superficie di Riemann compatta e connessa C ; desideriamo mostrare che $H^1(C, L)$ ha dimensione finita. Cominciamo con l'osservare che $h^0(C, L)$ è finito; infatti, se L non ha sezioni olomorfe non nulle non vi è nulla da dimostrare, mentre in caso contrario L è della forma $\mathcal{O}(D)$ per qualche divisore D e possiamo fare ricorso al teorema di Riemann-Roch nella forma che è stata dimostrata in queste note. Scegliamo una metrica hermitiana su L , cioè una metrica hermitiana sulle fibre di L che vari in modo C^∞ . Una metrica siffatta può essere ad esempio costruita incollando tra loro metriche hermitiane locali per mezzo di una partizione dell'unità. Date sezioni s e t di L , non necessariamente olomorfe, scriveremo $\langle s, t \rangle$ per indicare il prodotto interno di s e t rispetto a questa metrica, e $|s|$ per indicare la lunghezza di s . Supponiamo che L sia data da funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$ e che $s = \{s_\alpha\}$ sia una sezione. Allora

$$|s|^2 = \mu_\alpha |s_\alpha|^2 = \mu_\beta |s_\beta|^2,$$

dove le μ_α sono funzioni positive e lisce. È chiaro che le μ_α devono soddisfare

$$\mu_\alpha = g_{\alpha\beta} \mu_\beta.$$

Viceversa, dare funzioni positive soddisfacenti queste relazioni equivale a dare una metrica su L . Supponiamo che $\varphi = \{\varphi_\alpha\}$ sia una $(0, 1)$ -forma. Poniamo $\#\varphi = \{\psi_\alpha\}$, dove

$$\psi_\alpha = \mu_\alpha \bar{\varphi}_\alpha.$$

Poiché $\psi_\alpha = |g_{\alpha\beta}|^{-2} \mu_\beta \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{\varphi}_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} \mu_\beta \bar{\varphi}_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} \psi_\beta$, $\#\varphi$ è una sezione liscia di KL^{-1} che è olomorfa se e solo se $\vartheta\varphi = 0$, dove ϑ è l'operatore differenziale definito da

$$s_\alpha = \frac{\partial(\mu_\alpha \varphi_\alpha)}{\mu_\alpha \Phi}.$$

Si verifica facilmente che $s = \{s_\alpha\}$ è una sezione di L . Se definiamo il prodotto interno di due sezioni s, t di L e quello di due $(0, 1)$ -forme $\varphi = \{\varphi_\alpha\}$ e $\psi = \{\psi_\alpha\}$ a valori in L ponendo

$$(s, t) = \int (s, t)\Phi, \quad (\varphi, \psi) = \int \varphi \wedge \#\psi,$$

dove $\varphi \wedge \#\psi$ è la $(1, 1)$ -forma globale con espressioni locali $\mu_\alpha \varphi_\alpha \wedge \bar{\psi}_\alpha$, allora ϑ è l'aggiunto di $\bar{\partial}$. Ora immaginiamo di poter risolvere l'equazione differenziale

$$(6.9) \quad \vartheta \bar{\partial} s = \vartheta \varphi$$

per ogni $(0, 1)$ -forma φ a valori in L . Allora ogni classe in $H^1(C, L)$ ha un rappresentante ϑ -chiuso, che è unico dato che $\vartheta \bar{\partial} s = 0$ implica che $(\bar{\partial} s, \bar{\partial} s) = 0$, e quindi $\bar{\partial} s$ deve annullarsi identicamente. In più, l'applicazione

$$(0, 1)\text{-forme } \vartheta\text{-chiuso a valori in } L \rightarrow \text{sezioni olomorfe di } KL^{-1}, \\ \varphi \mapsto \#\varphi,$$

è un antiisomorfismo tra $H^1(C, L)$ e $H^0(C, KL^{-1})$ che trasforma il prodotto interno su $H^1(C, L)$ nella dualità standard tra $H^1(C, L)$ e $H^0(C, KL^{-1})$. Ciò dà un'altra dimostrazione del teorema di dualità e mostra che $H^1(C, L)$ ha dimensione finita, dato che ciò è vero per $H^0(C, KL^{-1})$.

Che l'equazione 6.9 sia sempre risolubile si può dimostrare con lo stesso metodo usato per dimostrare il teorema 2.5, applicato non al Laplaciano standard, ma all'operatore $\vartheta \bar{\partial}$. Omettiamo i dettagli.

Parte 2

Tori complessi

Generalità sui tori complessi

Un *toro complesso* non è altro che un gruppo di Lie complesso connesso e compatto. In altre parole, un toro complesso non è altro che è il dato di una varietà complessa compatta e connessa X più applicazioni olomorfe

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto xy \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned} \quad x, y \in X$$

soddisfacenti i consueti assiomi di gruppo. Un omomorfismo di tori complessi è una applicazione olomorfa che è anche un omomorfismo di gruppi. Il seguente risultato consente di dare una semplice descrizione esplicita di tutti i tori complessi.

PROPOSIZIONE 7.1. *Ogni gruppo di Lie complesso connesso e compatto è abeliano.*

Consideriamo l'applicazione

$$\phi_x(y) = xyx^{-1}y^{-1}.$$

Quando x è l'identità di X , $\phi_x(y)$ è l'identità per ogni y . Quindi, quando x è vicino all'identità, ϕ_x manda tutto X in un aperto coordinato. Le funzioni olomorfe a valori vettoriali su una varietà compatta sono costanti, e quindi $\phi_x(y)$ è l'identità per ogni y . Questo mostra che X è commutativo. D'ora in poi la legge di gruppo

nei tori complessi sarà scritta additivamente. Siamo ora in grado di descrivere esplicitamente i tori complessi. Se X è uno di essi, sia $\varphi : \widehat{X} \rightarrow X$ il suo rivestimento universale. Dato che \widehat{X} è un gruppo di Lie abeliano connesso e semplicemente connesso, è isomorfo a \mathbb{C}^N per qualche N ; inoltre φ è un omomorfismo di gruppi e il suo nucleo è un sottogruppo discreto di rango massimo di \mathbb{C}^N (un *reticolo*), ed è quindi un gruppo abeliano libero su $2N$ generatori.

Dunque ogni toro complesso è isomorfo al quoziente di un \mathbb{C}^N modulo un reticolo. Due reticoli Λ e Λ' si dicono *equivalenti* se corrispondono l'uno all'altro via una trasformazione \mathbb{C} -lineare. Ciò equivale a dire che \mathbb{C}^N/Λ e \mathbb{C}^N/Λ' sono tori isomorfi.

ESEMPIO 7.2. Un toro complesso di dimensione uno è il quoziente di \mathbb{C} modulo il sottogruppo Λ generato da due numeri complessi ω_1, ω_2 indipendenti su \mathbb{R} (figura 1). Notiamo che ω_1 e ω_2 sono numerati in modo che l'angolo da essi formato sia inferiore a π . Ogni altra base di Λ con questa proprietà è della forma

$$\omega'_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2,$$

dove

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

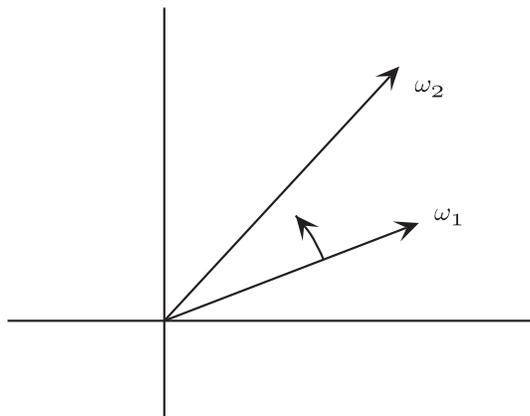


FIGURA 1. Generatori di un reticolo

è una matrice intera con determinante 1. Possiamo normalizzare la base ω_1, ω_2 dividendo per ω_1 . Ciò produce un nuovo reticolo che è equivalente a Λ ed è generato da 1 e da $\tau = \omega_2/\omega_1$. Segue dalle ipotesi che τ ha parte immaginaria positiva. È ora chiaro che $(1, \tau)$ e $(1, \tau')$ generano reticoli equivalenti se e solo se

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

dove

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

è una matrice intera con determinante 1. Quindi le classi di isomorfismo di tori complessi unidimensionali corrispondono ai punti del semipiano superiore modulo trasformazioni lineari frazionarie a coefficienti interi di determinante 1.

OSSERVAZIONE 7.3. La legge di gruppo di un toro complesso X è determinata, a meno di traslazione, dalla struttura complessa. Più in generale, se X' è un altro toro complesso e f una applicazione olomorfa di X in X' che porta l'identità di X nell'identità di X' , allora f è un omomorfismo di gruppi. Ciò si può mostrare adoperando lo stesso metodo usato nella dimostrazione della proposizione 7.1. Consideriamo infatti l'applicazione

$$\phi(x, y) = f(x) + f(y) - f(x + y).$$

Per ogni y , $\phi(0, y)$ vale 0, quindi $\phi(x, y)$ appartiene a uno stesso aperto coordinato per ogni y e per x vicino a 0, e deve quindi essere una funzione costante di y . Ma $\phi(x, 0) = 0$, quindi $\phi(x, y)$ è identicamente nullo.

7.1. Coomologia dei tori complessi

Sia $X = \mathbb{C}^N/\Lambda$ un toro complesso. Scegliamo una base u_1, \dots, u_{2N} per Λ . Dal punto di vista reale X è il prodotto dei $2N$ cerchi $\mathbb{R}u_i/\mathbb{Z}u_i$, $i = 1, \dots, 2N$. Ne segue che il gruppo fondamentale (o il primo gruppo di omologia) di X può essere identificato con Λ , e il primo gruppo di coomologia con $\text{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z})$. Inoltre segue dalla formula di Künneth che l'algebra di coomologia di X non è altro che l'algebra

esterna su $H^1(X, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z})$. Se introduciamo coordinate *reali* x_1, \dots, x_{2N} in \mathbb{C}^N ponendo

$$z = \sum x_i u_i,$$

il differenziali dx_1, \dots, dx_{2N} sono invarianti per traslazione, e quindi indotti da differenziali su X che indicheremo con gli stessi simboli. È chiaro che le classi di coomologia di questi differenziali corrispondono, via l'omomorfismo di de Rham e l'identificazione di $H_1(X, \mathbb{Z})$ con Λ , alla base duale di u_1, \dots, u_{2N} . In effetti, questo significa semplicemente che

$$\int_0^{u_i} dx_j = \delta_{ij}.$$

Inoltre, dato che cup-prodotto e prodotto esterno di forme si corrispondono nell'isomorfismo di de Rham, $H^m(X, \mathbb{C})$ è generato liberamente dalle classi delle forme

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_m}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_m,$$

che sono tra l'altro classi *intere*. In altre parole, $H^m(X, \mathbb{C})$ è isomorfo allo spazio vettoriale delle m -forme invarianti per traslazione su \mathbb{C}^N .

Finora non abbiamo ancora tenuto conto della struttura complessa di \mathbb{C}^N . Se lo facciamo, e introduciamo coordinate complesse z_1, \dots, z_N , un'altra base dello spazio delle m -forme invarianti per traslazione è data dalle forme del tipo

$$dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}, \\ p + q = m, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_p, \quad j_1 < j_2 < \dots < j_q.$$

Quindi ogni m -forma invariante φ può essere scritta in modo unico sotto la forma

$$\varphi = \sum_{p+q=m} \varphi^{p,q},$$

dove $\varphi^{p,q}$ è invariante per traslazione e ha tipo (p, q) . Questo significa che l' m -esimo gruppo di coomologia complessa di X ha una decomposizione in somma diretta

$$H^m(X, \mathbb{C}) = \sum_{p+q=m} H^{p,q}(X),$$

dove $H^{p,q}(X)$ è lo spazio vettoriale delle classi di coomologia delle forme chiuse di tipo (p, q) , e come conseguenza

$$H^{p,q}(X) = \overline{H^{q,p}(X)}.$$

Questo è un caso particolare della *decomposizione di Hodge*, valida per ogni varietà kähleriana compatta, e non solo per i tori complessi (si veda ad esempio [12] o [3]).

Per completare il quadro dobbiamo solo identificare ogni spazio $H^{p,q}(X)$ con il gruppo di coomologia $H^q(X, \Omega_X^p)$, dove Ω_X^p è il fascio delle p -forme olomorfe su X . L'identificazione avviene via l'isomorfismo di Dolbeault:

$$H^q(X, \Omega_X^p) \simeq \frac{(p, q)\text{-forme } \bar{\partial}\text{-chiuse su } X}{(p, q)\text{-forme } \bar{\partial}\text{-esatte su } X}.$$

È chiaro che ogni classe in $H^{p,q}(X)$, vista come (p, q) -forma invariante, dà origine a una classe in $H^q(X, \Omega_X^p)$. Ciò fornisce un omomorfismo $\rho: H^{p,q}(X) \rightarrow H^q(X, \Omega_X^p)$; vogliamo dimostrare che si tratta in effetti di un isomorfismo. Mostriamo innanzitutto che è iniettivo. Sia $d\mu$ un multiplo positivo della misura di Lebesgue su \mathbb{C}^N , che possiamo pensare indotto da una misura su X che indicheremo con lo stesso simbolo. Possiamo supporre di aver normalizzato $d\mu$ in modo che X abbia volume

1. Allora a ogni forma φ su X se ne può associare una invariante $I(\varphi)$, con un procedimento di media:

$$I(\varphi) = \int_X \tau_g^*(\varphi) d\mu(g),$$

dove τ_g è la traslazione $x \mapsto x + g$. L'ipotesi di normalizzazione assicura che $I(\varphi) = \varphi$ quando φ è invariante. È anche chiaro che I commuta con la differenziazione esterna, e quindi calcolando la media di una forma $\bar{\partial}$ -esatta si ottiene zero. Ma allora due forme invarianti non possono differire per una forma $\bar{\partial}$ -esatta a meno che non coincidano.

La dimostrazione della suriettività di ρ è leggermente più sottile. Notiamo innanzitutto che, dato che X è un gruppo di Lie, il suo fibrato tangente e tutti i fibrati associati, in particolare le potenze esterne del fibrato cotangente, sono banali. Basta dunque dimostrare la suriettività di ρ per $H^q(X, \mathcal{O}_X)$. Sia

$$\Delta = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i}$$

l'operatore di Laplace su \mathbb{C}^N (o su X). E esso opera sulle forme

$$\sum a_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

operando separatamente su ogni coefficiente.

Dico che, per ogni $(0, q)$ -forma $\bar{\partial}$ -chiusa φ , la forma $I(\varphi) - \varphi$ è $\bar{\partial}$ -esatta o, in altri termini, che una forma $\bar{\partial}$ -chiusa di media nulla è esatta. Per dimostrarlo faremo uso di un risultato ausiliario. Indichiamo con T il toro reale $\mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m$. Come sopra, indichiamo con I l'operatore che associa ad ogni forma su T la sua media calcolata rispetto alla misura di Lebesgue; osserviamo che, rispetto a questa misura, il volume di T è 1. Quanto dobbiamo dimostrare è una conseguenza del seguente risultato.

LEMMA 7.4. *Sia (a_{ij}) una matrice reale $m \times m$ simmetrica e positiva. Poniamo*

$$E = \sum a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

e sia α una funzione liscia su T tale che $I(\alpha) = 0$. Allora c'è una e una sola funzione liscia β tale che $E\beta = \alpha$ e $I(\beta) = 0$.

Prima di dimostrare il lemma 7.4 deduciamone la suriettività di ρ . Sia

$$\varphi = \sum_{i_1 < \dots < i_q} \varphi_{i_1 \dots i_q} d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_q}$$

una $(0, q)$ -forma $\bar{\partial}$ -chiusa tale che $I(\varphi) = 0$. Il lemma 7.4 si applica a $E = \Delta$, e possiamo quindi scrivere $\varphi = \Delta\psi$ per qualche $(0, q)$ -forma

$$\psi = \sum_{i_1 < \dots < i_q} \psi_{i_1 \dots i_q} d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_q}.$$

La forma ψ è $\bar{\partial}$ -chiusa; infatti $\Delta\bar{\partial}\psi = \bar{\partial}\Delta\psi = 0$ e $I(\bar{\partial}\psi) = 0$, quindi $\bar{\partial}\psi = 0$ per la parte unicità del lemma 7.4. Dire che ψ è $\bar{\partial}$ -chiusa equivale a dire che

$$\sum_j (-1)^j \frac{\partial \psi_{i_1 \dots \widehat{i}_j \dots i_{q+1}}}{\partial z_{i_j}} = 0 \quad \text{per ogni scelta di } i_1 < \dots < i_{q+1}.$$

Qui, e in altre situazioni analoghe nel seguito, un accento circonflesso sopra un termine di una formula significa che quel termine va omissso. Per ogni permutazione σ di $\{1, \dots, r\}$ ed ogni forma

$$\xi = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \xi_{i_1 \dots i_r} d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_r}$$

poniamo

$$\xi_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(r)}} = \text{Sgn}(\sigma) \xi_{i_1 \dots i_r},$$

dove $\text{Sgn}(\sigma)$ è il segno di σ . Ora poniamo

$$\begin{aligned} \gamma_{i_1 \dots i_{q-1}} &= \sum_i \frac{\partial \psi_{i i_1 \dots i_{q-1}}}{\partial z_i}, \\ \gamma &= \sum_{i_1 < \dots < i_{q-1}} \gamma_{i_1 \dots i_{q-1}} d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_{q-1}}. \end{aligned}$$

Usando la formula 7.1 si calcola immediatamente che

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}\gamma)_{i_1 \dots i_q} &= \sum_j (-1)^{j-1} \frac{\partial \gamma_{i_1 \dots \widehat{i}_j \dots i_q}}{\partial \bar{z}_{i_j}} \\ &= \sum_j \sum_i (-1)^{j-1} \frac{\partial \psi_{i i_1 \dots \widehat{i}_j \dots i_q}}{\partial z_i \partial \bar{z}_{i_j}} \\ &= \sum_i \frac{\partial \psi_{i_1 \dots i_q}}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} \\ &= \varphi_{i_1 \dots i_q}. \end{aligned}$$

Resta da dimostrare il lemma 7.4. Una delle possibili dimostrazioni ricalca da vicino quella del teorema 2.5 che abbiamo dato nel Capitolo 6. Sfruttando le peculiarità della situazione in cui ci troviamo è tuttavia possibile dare una dimostrazione assai più semplice e diretta. La funzione α ha una serie di Fourier assolutamente convergente

$$\alpha = \sum_{h_1, \dots, h_m \in \mathbb{Z}} \alpha_{h_1, \dots, h_m} \exp(2\pi\sqrt{-1}\sum h_i x_i).$$

Lo stesso si può dire delle derivate di α di qualsiasi ordine; le corrispondenti serie di Fourier si ottengono derivando termine a termine quella di α . L'ipotesi che $I(\alpha) = 0$ dice semplicemente che $\alpha_{0, \dots, 0} = 0$. Consideriamo un'altra serie di Fourier con coefficienti indeterminati

$$\beta = \sum_{h_1, \dots, h_m \in \mathbb{Z}} \beta_{h_1, \dots, h_m} \exp(2\pi\sqrt{-1}\sum h_i x_i),$$

e calcoliamo $E\beta$ differenziando formalmente termine a termine. Il risultato è che

$$E\beta = -4\pi^2 \sum_{h_1, \dots, h_m \in \mathbb{Z}} \beta_{h_1, \dots, h_m} \left(\sum_{j,k} a_{jk} h_j h_k \right) \exp(2\pi\sqrt{-1}\sum h_i x_i).$$

Per ipotesi, la quantità $\sum a_{jk} h_j h_k$ è positiva quando almeno uno degli h_i non è nullo, quindi la serie di Fourier $\beta = \sum \beta_{h_1, \dots, h_m} \exp(2\pi\sqrt{-1}\sum h_i x_i)$ con coefficienti

$$\beta_{h_1, \dots, h_m} = \begin{cases} 0 & \text{se } h_1 = \dots = h_m = 0 \\ \frac{-1}{4\pi^2 \sum a_{jk} h_j h_k} \alpha_{h_1, \dots, h_m} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è la sola che soddisfi le condizioni $I(\beta) = 0$ e $E\beta = \alpha$ (formalmente). Segue immediatamente dalle proprietà di convergenza della serie di Fourier di α e dalla positività di (a_{ij}) che la serie β converge assolutamente con tutte le sue derivate termine a termine. Quindi β definisce una funzione liscia a media nulla su T tale che $E\beta = \alpha$. Ciò completa la dimostrazione del lemma 7.4.

Fibrati in rette sui tori complessi

Sia L un fibrato in rette su un toro complesso N -dimensionale $X = \mathbb{C}^N/\Lambda$. Indichiamo con π l'applicazione quoziente $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N/\Lambda$. Il fibrato in rette π^*L è banale; in effetti vale il risultato seguente.

PROPOSIZIONE 8.1. *Ogni fibrato in rette (anzi ogni fibrato vettoriale) su \mathbb{C}^N è banale.*

Questa è una semplice conseguenza del teorema di Cousin (si veda ad esempio [5]).

FATTO 8.2 (Teorema di Cousin). $H^1(\mathbb{C}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N}) = 0$.

Prima di dedurre la proposizione 8.1 dal teorema 8.2, ricordiamo la costruzione della classe di Chern di un fibrato in rette L su una varietà complessa Y . Scegliamo un ricoprimento $\{U_i\}$ di Y con aperti su cui L sia banale e tale che $U_i \cap U_j$ sia semplicemente connesso per ogni scelta di i e j ; nel caso in cui $Y = \mathbb{C}^N$ possiamo supporre che gli U_i siano palle. Siano f_{ij} funzioni di transizione per L rispetto a questo ricoprimento. Dato che $U_i \cap U_j$ è semplicemente connesso possiamo scrivere

$$f_{ij} = e^{2\pi\sqrt{-1}\gamma_{ij}}$$

e la condizione di cociclo $f_{ij}f_{jk} = f_{ik}$ implica che

$$\gamma_{ij} + \gamma_{jk} = \gamma_{ik} + n_{ijk},$$

dove gli n_{ijk} sono interi e soddisfano la condizione di cociclo

$$n_{jkl} - n_{ikl} + n_{ijl} - n_{ijk} = 0.$$

Dunque $\{n_{ijk}\}$ determina una classe di coomologia intera di grado 2, la *classe di Chern* di L . Nel caso specifico di \mathbb{C}^N si ha che $H^2(\mathbb{C}^N, \mathbb{Z}) = 0$, e quindi $\{n_{ijk}\}$ è un cobordo e possiamo modificare i γ_{ij} in modo che formino un cociclo. Ma allora $\{\gamma_{ij}\}$ è un cociclo per il fatto 8.2, cioè possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \zeta_j - \zeta_i, \\ f_{ij} &= e^{2\pi\sqrt{-1}\zeta_j} e^{-2\pi\sqrt{-1}\zeta_i}, \end{aligned}$$

e L è banale.

In linguaggio più raffinato, questo ragionamento mostra che su ogni varietà complessa Y c'è una successione esatta di fasci

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp(2\pi\sqrt{-1}\cdot)} \mathcal{O}^\times \rightarrow 0,$$

dove \mathcal{O}^\times è il fascio delle funzioni olomorfe mai nulle, da cui una successione esatta lunga di coomologia

$$\dots \rightarrow H^1(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}^\times) \xrightarrow{c_1} H^2(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

Il gruppo $H^1(Y, \mathcal{O}^\times)$ è il gruppo delle classi di isomorfismo di fibrati in rette olomorfe su Y , e la mappa cobordo c_1 associa a ogni fibrato in rette L la sua classe di Chern $c_1(L)$. Quando $Y = \mathbb{C}^N$ si ha che $H^1(Y, \mathbb{Z}) = H^1(Y, \mathcal{O}) = 0$, e quindi $H^1(Y, \mathcal{O}^\times) = \{1\}$. In generale, due fibrati in rette con la stessa classe di Chern differiscono per un elemento di $H^1(Y, \mathcal{O})/H^1(Y, \mathbb{Z})$, cioè per un fibrato in rette con funzioni di transizione, rispetto a un opportuno ricoprimento, della forma

$$\begin{aligned} f_{ij} &= e^{2\pi\sqrt{-1}\gamma_{ij}}, \\ \gamma_{ij} + \gamma_{jk} &= \gamma_{ik}. \end{aligned}$$

In vista di future applicazioni è utile trovare una formula esplicita per un rappresentante di de Rham della classe di Chern di un fibrato in rette. Sia Y una varietà complessa, e L un fibrato in rette su Y con funzioni di transizione f_{ij} rispetto al ricoprimento $\{U_i\}$. Supponiamo che ogni $U_i \cap U_j$ sia semplicemente connesso e scriviamo f_{ij} sotto la forma 8. Il cociclo di Chern $\{n_{ijk}\}$ è il cobordo, in coomologia di Čech, della cocatena $\{\gamma_{ij}\}$; applicando a quest'ultima l'operazione di differenziazione esterna si ottiene un 1-cociclo di 1-forme differenziali $\left\{\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}d\log(f_{ij})\right\}$. Usando una partizione dell'unità possiamo trovare 1-forme lisce ω_i su ognuno degli U_i tali che

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}d\log(f_{ij}) = \omega_j - \omega_i \quad \text{su } U_i \cap U_j.$$

Differenziando questa formula si ottiene che

$$d\omega_i = d\omega_j \quad \text{su } U_i \cap U_j.$$

Un rappresentante di de Rham di $c_1(L)$ è la 2-forma globale la cui restrizione a U_i è $d\omega_i$, per ogni i .

Supponiamo che L sia fornito di una metrica hermitiana. Sia α_i il quadrato della lunghezza della sezione di L su U_i che corrisponde alla costante 1 nella trivializzazione locale data. Allora

$$\alpha_j = |f_{ij}|^2 \alpha_i.$$

Ora

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}d\log(f_{ij}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\partial\log|f_{ij}|^2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}[\partial\log\alpha_j - \partial\log\alpha_i],$$

quindi un rappresentante di de Rham di $c_1(L)$ è la $(1, 1)$ -forma globale con espressione locale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\bar{\partial}\partial\log\alpha_i.$$

Per concludere, notiamo che il cociclo $\left\{\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}d\log(f_{ij})\right\}$ definisce una classe in $H^1(Y, \Omega_Y^1)$, la cosiddetta classe di Chern di Atiyah di L . Se Y è una varietà di Kähler, questa corrisponde alla consueta classe di Chern nella decomposizione di Hodge. Torniamo al nostro problema originario. Abbiamo osservato che π^*L è

banale. Scegliamo un isomorfismo $\varphi : \pi^*L \rightarrow \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}$. Ogni altra banalizzazione di π^*L si può ottenere componendo φ con un automorfismo del fibrato in rette $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}$, cioè con la moltiplicazione per una funzione olomorfa mai nulla su \mathbb{C}^N .

Possiamo rappresentare L come il quoziente di $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}$ modulo le identificazioni

$$(z, \xi) \equiv (z + u, f_u(z)\xi)$$

$$z \in \mathbb{C}^N, \quad \xi \in \mathbb{C}, \quad u \in \Lambda,$$

dove le f_u sono funzioni oloedriche mai nulle che soddisfano la condizione di cociclo

$$f_u(z + v)f_v(z) = f_{u+v}(z).$$

La moltiplicazione per una funzione mai nulla $g(z)$ ha l'effetto di rimpiazzare il cociclo $\{f_u\}$ con un nuovo cociclo $\{f'_u\}$ dove

$$f'_u(z) = f_u(z)g(z + u)g(z)^{-1}.$$

Ci proponiamo ora di descrivere esplicitamente tutti i fibrati in rette su X ; in altre parole, vogliamo porre il cociclo $\{f_u\}$ in forma standard. Consideriamo innanzitutto funzioni f_u che siano esponenziali di polinomi di primo grado

$$f_u(z) = e^{2\pi\sqrt{-1}[a_u(z)+b_u]},$$

dove a_u è una forma lineare e b_u una costante. La condizione di cociclo 8 si traduce in

$$(8.1) \quad a_{u+v}(z) = a_u(z) + a_v(z)$$

$$(8.2) \quad b_{u+v} \equiv b_u + b_v + a_u(v) \pmod{\mathbb{Z}}$$

La condizione 8.1 ci permette di estendere $a_u(z)$ per linearità a una forma bilineare $A(z, w)$ tale che $a_u(z) = A(z, u)$. La forma $A(z, w)$ è \mathbb{C} -lineare nella prima variabile e solo \mathbb{R} -lineare nella seconda. Scambiando i ruoli di u e v nella formula 8.2 si trova che, per ogni scelta di $u, v \in \Lambda$,

$$A(u, v) - A(v, u) \in \mathbb{Z}.$$

Poniamo

$$E(u, v) = A(u, v) - A(v, u),$$

$$c_u = b_u - \frac{1}{2}A(u, u).$$

Allora la formula 8.2 si traduce in

$$c_u + c_v \equiv c_{u+v} + \frac{1}{2}E(u, v) \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Ciò mostra che la parte immaginaria di c_u è una funzione additiva di u e quindi si estende a una forma \mathbb{R} -lineare su \mathbb{C}^N . Quindi, dopo moltiplicazione per l'esponenziale di una opportuna forma \mathbb{C} -lineare, possiamo supporre che c_u sia reale per ogni u . Se si pone

$$\rho(u) = e^{2\pi\sqrt{-1}c_u}$$

si ha che

$$(8.3) \quad |\rho(u)| = 1$$

$$\rho(u)\rho(v) = \rho(u + v)e^{\pi\sqrt{-1}E(u, v)} = \pm\rho(u + v)$$

Tra parentesi, è chiaro che, per qualsiasi forma intera antisimmetrica E , esistono numeri $\rho(u)$ con queste proprietà.

A questo punto il nostro cociclo $\{f_u\}$ è della forma

$$f_u(z) = \rho(u)e^{2\pi\sqrt{-1}[A(z, u) + A(u, u)/2]}.$$

Possiamo ancora cambiare la banalizzazione di $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}$ moltiplicando per

$$g(z) = e^{2\pi\sqrt{-1}\mathcal{L}(z,z)}$$

dove $\mathcal{L}(z, w)$ è una forma simmetrica \mathbb{C} -bilineare. L'effetto di ciò è di rimpiazzare f_u con

$$f_u(z)g(z+u)g(z)^{-1} = f_u(z)e^{2\pi\sqrt{-1}[2\mathcal{L}(z,u)+\mathcal{L}(u,u)]}.$$

Osserviamo che, in virtù della proprietà 8, $E(z, w)$ è reale, e quindi la parte immaginaria di $A(z, w)$ è simmetrica. Dunque

$$\begin{aligned} E(\sqrt{-1}z, \sqrt{-1}w) &= A(\sqrt{-1}z, \sqrt{-1}w) - A(\sqrt{-1}w, \sqrt{-1}z) \\ &= \sqrt{-1}[A(z, \sqrt{-1}w) - A(w, \sqrt{-1}z)] \\ &= \sqrt{-1}[A(\sqrt{-1}w, z) - A(\sqrt{-1}z, w)] = E(z, w). \end{aligned}$$

Ne segue che $E(z, \sqrt{-1}w)$ è una forma reale simmetrica e che

$$H(z, w) = -E(z, \sqrt{-1}w) + \sqrt{-1}E(z, w)$$

è una forma *hermitiana*. Quindi possiamo scegliere come \mathcal{L} la forma

$$\mathcal{L}(z, w) = \frac{1}{4\sqrt{-1}}H(z, w) - \frac{1}{2}A(z, w)$$

e ridurre il nostro cociclo $\{f_u\}$ alla sua forma finale

$$f_u = \rho(u)e^{\pi H(z,u) + \frac{\pi}{2}H(u,u)}.$$

Per ogni forma hermitiana H la cui parte immaginaria sia intera su $\Lambda \times \Lambda$ e ogni ρ tale che valgano le condizioni 8.3 indicheremo con $L(H, \rho)$ il fibrato in rette su X dato dal cociclo 8. Osserviamo che

$$L(H_1, \rho_1) \otimes L(H_2, \rho_2) = L(H_1 + H_2, \rho_1\rho_2).$$

Le sezioni di $L(H, \rho)$ corrispondono alle funzioni olomorfe ϑ su \mathbb{C}^N che soddisfano l'equazione funzionale

$$\vartheta(z+u) = \rho(u)e^{\pi H(z,u) + \frac{\pi}{2}H(u,u)}\vartheta(z)$$

per ogni $u \in \Lambda$. Queste vengono chiamate *funzioni theta* rispetto alla forma hermitiana H e al *moltiplicatore* (o *quasicarattere*) ρ . Il risultato principale di questo capitolo è il seguente.

TEOREMA 8.3 (Appell-Humbert). *Sia $X = \mathbb{C}^N/\Lambda$ un toro complesso. Allora:*

- i) *ogni fibrato in rette su X è della forma $L(H, \rho)$;*
- ii) *$L(H_1, \rho_1)$ e $L(H_2, \rho_2)$ sono isomorfi se e solo se $H_1 = H_2$, $\rho_1 = \rho_2$;*
- iii) *$E = \text{Im}(H)$ è la classe di Chern di $L(H, \rho)$.*

Si noti che l'enunciato del teorema 8.3 è equivalente alla combinazione di iii) e della affermazione che il gruppo $H^1(X, \mathcal{O})/H^1(X, \mathbb{Z})$ è isomorfo al gruppo dei caratteri

$$\rho : \Lambda \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Dimostriamo iii). Una metrica su $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}$ invariante rispetto all'azione

$$(z, \xi) \mapsto \left(z + u, \rho(u)e^{\pi H(z,u) + \frac{\pi}{2}H(u,u)}\xi \right)$$

è data da

$$|(z, \xi)|^2 = e^{-\pi H(z,z)}|\xi|^2.$$

Questa metrica ne induce una su $L(H, \rho)$ che può essere usata per calcolare $c_1(L(H, \rho))$. Se scriviamo $H(z, w) = \sum h_{ij} z_i \bar{w}_j$, la forma di Chern di questa metrica è

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \bar{\partial}\partial \log e^{-\pi H(z, z)} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \sum h_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j,$$

che corrisponde esattamente ad E .

Ora dimostriamo il resto del teorema di Appell-Humbert. Sia ω una $(0, 1)$ -forma invariante per traslazione su \mathbb{C}^N . Questa forma corrisponde a una classe in $H^1(X, \mathcal{O})$, che a sua volta determina un fibrato in rette su X con classe di Chern nulla. Dico che questo fibrato in rette non è altro che $L(0, \rho)$, dove

$$\rho(u) = e^{2\pi\sqrt{-1} \int_0^u (\omega + \bar{\omega})}.$$

La verifica è una semplice applicazione delle formule esplicite che danno l'isomorfismo di Dolbeault e viene lasciata al lettore. Che ρ sia un carattere segue dalla invarianza per traslazione di ω . Resta da dimostrare ii) per $H_1 = H_2 = 0$. Basterà mostrare che $L(0, \rho)$ è banale solo se $\rho = 1$. In effetti l'equazione funzionale per le funzioni theta si riduce in questo caso a

$$\vartheta(z + u) = \rho(u)\vartheta(z).$$

Ciò implica in particolare che $|\vartheta(z + u)| = |\vartheta(z)|$ per ogni $u \in \Lambda$, cioè che $|\vartheta|$ discende a una funzione su X . Poiché X è compatto, ne segue che ϑ è una funzione limitata su \mathbb{C}^N , e quindi costante; dunque ϑ deve essere nulla se $\rho(u) \neq 1$ per qualche u . La dimostrazione del teorema di Appell-Humbert è completa.

Ci proponiamo ora di descrivere esplicitamente il fibrato in rette $\tau_a^* L(H, \rho)$, dove τ_a indica la traslazione $x \mapsto x + a$ su X . Mostriamo che

$$\tau_a^* L(H, \rho) = L(H, \hat{\rho}),$$

dove $\hat{\rho}(u) = \rho(u)e^{2\pi\sqrt{-1}E(a, u)}$. Supponiamo per semplicità che $L(H, \rho)$ possieda sezioni non nulle; il ragionamento non è comunque molto diverso se ciò non accade. È chiaro che, se ϑ è una sezione non nulla di $L(H, \rho)$, vista come funzione theta, allora $\vartheta(z + a)$ rappresenta una sezione di $\tau_a^* L(H, \rho)$ e soddisfa l'equazione funzionale

$$\vartheta(z + a + u) = \rho(u)e^{\pi H(z, u) + \frac{\pi}{2} H(u, u) + \pi H(a, u)} \vartheta(z + a).$$

Possiamo moltiplicare $\vartheta(z + a)$ per una funzione mai nulla, ad esempio per $e^{\pi H(z, a)}$. Allora $\hat{\vartheta}(z) = e^{\pi H(z, a)} \vartheta(z + a)$ rappresenta una sezione di $\tau_a^* L(H, \rho)$ e soddisfa l'equazione funzionale

$$\hat{\vartheta}(z + u) = \rho(u)e^{2\pi\sqrt{-1}E(a, u)} e^{\pi H(z, u) + \frac{\pi}{2} H(u, u)} \hat{\vartheta}(z).$$

Dunque $\hat{\vartheta}$ è una funzione theta rispetto alla forma hermitiana H e al moltiplicatore $\hat{\rho}(u) = \rho(u) \exp(2\pi\sqrt{-1}E(a, u))$.

Notiamo che, se a e b sono punti di X , allora

$$\tau_a^* L(H, \rho) \otimes \tau_b^* L(H, \rho) \simeq \tau_{a+b}^* L(H, \rho) \otimes L(H, \rho).$$

Questa formula, che va sotto il nome di *teorema del quadrato*, segue dal paragone di forme hermitiane e quasicaratteri dei due membri. È chiaro che le forme hermitiane dei due lati sono uguali. Quanto ai quasicaratteri, quello del membro di sinistra è

$$\rho(u)e^{2\pi\sqrt{-1}E(a, u)} \rho(u)e^{2\pi\sqrt{-1}E(b, u)} = \rho(u)^2 e^{2\pi\sqrt{-1}E(a+b, u)},$$

come quello del membro di destra. Se scriviamo $L = L(H, \rho)$, la formula 8 dice che l'applicazione

$$a \mapsto \phi_L(a) = \tau_a^* L \otimes L^{-1}$$

di X nel gruppo dei fibrati in rette su X con classe di Chern nulla è un omomorfismo di gruppi. Il nucleo di questo omomorfismo è l'insieme delle classi modulo Λ di tutti gli a tali che $E(a, u)$ sia intero per ogni $u \in \Lambda$. Se H è non degenere, ad esempio se è definita positiva, il nucleo è finito e, come segue ad esempio dal lemma 9.1 che sarà dimostrato nel prossimo capitolo, ha ordine pari a $\text{disc}(E)$, il discriminante di E vista come forma quadratica su Λ . Inoltre, sempre quando H è non degenere, l'applicazione 8 è suriettiva per ragioni di dimensione; in effetti l'insieme delle classi di isomorfismo dei fibrati in rette con classe di Chern nulla è il toro complesso $\widehat{X} = H^1(X, \mathcal{O})/H^1(X, \mathbb{Z})$, che ha la stessa dimensione di X , di cui viene chiamato *toro duale*. Il prodotto tensoriale di fibrati in rette corrisponde all'operazione di somma in \widehat{X} . L'applicazione $L \mapsto \phi_L$ associa ad ogni fibrato in rette su X un elemento di $\text{Hom}(X, \widehat{X})$ ed è un omomorfismo, come si verifica immediatamente. In altre parole, scrivendo additivamente l'operazione in $\text{Hom}(X, \widehat{X})$, si ha che

$$\phi_{L_1 L_2} = \phi_{L_1} + \phi_{L_2}.$$

Il teorema di Riemann-Roch per i tori complessi

Sia $X = \mathbb{C}^N/\Lambda$ un toro complesso. Supponiamo che esista una forma hermitiana H su \mathbb{C}^N la cui parte immaginaria E sia intera su $\Lambda \times \Lambda$ (“di solito” non vi è alcuna forma con questa proprietà, come spiegheremo più avanti). Sia ρ un moltiplicatore per H . Vogliamo calcolare la dimensione dello spazio delle sezioni di $L(H, \rho)$. Useremo il seguente risultato.

LEMMA 9.1. *Se H è non degenera esiste una base*

$$u_1, \dots, u_N, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N$$

di Λ tale che

$$\begin{aligned} E(u_i, u_j) &= E(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j) = 0 \\ -E(u_i, \tilde{u}_j) &= E(\tilde{u}_j, u_i) = d_i \delta_{ij}, \end{aligned}$$

dove i d_i sono interi positivi e $d_1 | d_2 | \dots | d_N$. In altre parole, la matrice di E rispetto a questa base è la matrice a blocchi

$$(9.1) \quad \begin{pmatrix} 0 & -\Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix},$$

dove

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & \\ & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & d_N \end{pmatrix}, \quad d_1 | d_2 | \dots | d_N.$$

DIMOSTRAZIONE. Scegliamo una base di Λ e indichiamo con $Q = (q_{ij})$ la matrice di E rispetto a questa base. La matrice Q è antisimmetrica. Cambiare base in Λ corrisponde a trasformare Q in $MQ {}^tM$, dove $M = (m_{ij})$ è una matrice intera unimodulare. Diremo che $MQ {}^tM$ è *unimodularmente congruente* a Q . Dobbiamo mostrare che ogni matrice intera antisimmetrica e non degenera Q è unimodularmente congruente a una matrice della forma 9.1. Le congruenze unimodulari elementari sono:

- i) Scambiare due righe e le colonne corrispondenti. Se le righe e le colonne da scambiare sono la h -esima e la k -esima, la matrice M è data da

$$\begin{aligned} m_{ij} &= 1 \quad \text{se } i = j \neq h, k \text{ oppure } \{i, j\} = \{h, k\}, \\ m_{ij} &= 0 \quad \text{altrimenti.} \end{aligned}$$

- ii) Cambiare il segno di una riga e della corrispondente colonna. Se la riga in questione è la h -esima, gli elementi di M sono della forma $m_{ij} = (-1)^{\delta_{ih}} \delta_{ij}$.

come si vede facilmente applicando una congruenza di tipo *iii*). Applicando un'altra congruenza dello stesso tipo possiamo rimpiazzare d_2 con il suo residuo modulo d_1 , che stiamo supponendo non nullo. Ciò tuttavia contraddice la minimalità di $d_1 = -q_{12}$. \square

Gli interi d_1, \dots, d_N vengono chiamati *divisori elementari* della forma E . È evidente che il quadrato del loro prodotto è il discriminante di E ; in altre parole

$$\text{disc}(E) = \left(\prod d_i \right)^2.$$

Una forma hermitiana H su \mathbb{C}^N la cui parte immaginaria E sia intera su $\Lambda \times \Lambda$ viene chiamata una *polarizzazione* di $X = \mathbb{C}^N/\Lambda$ se è definita positiva. Una polarizzazione si dice *principale* se il discriminante di E vale 1. Come vedremo più avanti, “di norma” un toro complesso non ammette polarizzazioni. Un toro complesso che possiede una polarizzazione viene detto *varietà abeliana*; come vedremo nella Sezione 9.1, un toro è una varietà abeliana se e solo se è immergibile come sottovarietà algebrica in uno spazio proiettivo.

Consideriamo un fibrato in rette $L(H, \rho)$ sul toro complesso $X = \mathbb{C}^N/\Lambda$. Ci proponiamo di calcolare lo spazio delle sezioni di questo fibrato nel caso in cui H è positiva definita, cioè nel caso in cui abbiamo a che fare con una polarizzazione. Scegliamo una base $u_1, \dots, u_N, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N$ di Λ come quella costruita nel lemma 9.1. Notiamo che u_1, \dots, u_N è una base complessa di \mathbb{C}^N , e indichiamo con U il sottospazio reale di \mathbb{C}^N da essa generato. Poniamo

$$(9.3) \quad \tilde{u}_i = \sum t_{ij} u_j, \quad T = (t_{ij}), \quad h_{ij} = H(u_i, u_j).$$

I numeri h_{ij} sono reali, e quindi

$$B(\sum z_i u_i, \sum w_i u_i) = \sum h_{ij} z_i w_j$$

definisce una forma bilineare e simmetrica su \mathbb{C}^N che è reale su U . Inoltre

$$H(z, u) = B(z, u)$$

quando $u \in U$.

Le sezioni che stiamo cercando di descrivere corrispondono a funzioni theta che soddisfano l'equazione funzionale

$$(9.4) \quad \vartheta(z + u) = \rho(u) e^{\pi H(z, u) + \frac{\pi}{2} H(u, u)} \vartheta(z), \quad u \in \Lambda.$$

Si verifica facilmente che la funzione

$$\tilde{\vartheta}(z) = e^{-\frac{\pi}{2} B(z, z)} \vartheta(z)$$

soddisfa l'equazione funzionale

$$\tilde{\vartheta}(z + u) = \rho(u) e^{\pi(H(z, u) - B(z, u) + \frac{1}{2} H(u, u))} \tilde{\vartheta}(z).$$

In particolare, se poniamo $z = \sum z_i u_i$ e $\tilde{u} = \sum \mu_i \tilde{u}_i$, dove gli z_i sono numeri complessi e i μ_i sono interi, allora

$$(9.5) \quad \begin{cases} \tilde{\vartheta}(z + u_i) = \rho(u_i) \tilde{\vartheta}(z), \\ \tilde{\vartheta}(z + \tilde{u}) = \rho(\tilde{u}) e^{-2\pi\sqrt{-1} \sum z_i \mu_i d_i - \pi\sqrt{-1} \sum \mu_i d_i t_{ij} \mu_j} \tilde{\vartheta}(z). \end{cases}$$

Infatti $H(z, \tilde{u}_j) - B(z, \tilde{u}_j) = 2\sqrt{-1} \sum z_i E(u_i, \tilde{u}_j)$. La restrizione di ρ a U è un omomorfismo. Dunque, per ogni $u \in U$, possiamo scrivere

$$\rho(u) = e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda(u)},$$

dove λ è una forma \mathbb{C} -lineare su \mathbb{C}^N la cui restrizione a U è reale. Ma allora $e^{-2\pi\sqrt{-1}\lambda(z)}\tilde{\vartheta}(z)$ è periodica rispetto a U , e $\tilde{\vartheta}(z)$ ha uno sviluppo in serie di Fourier:

$$(9.6) \quad \tilde{\vartheta}(z) = \sum a_{n_1, \dots, n_N} e^{2\pi\sqrt{-1}(\lambda(z) + \sum n_i z_i)}.$$

L'equazione funzionale 9.4 pone delle restrizioni sui coefficienti di questo sviluppo in serie, e precisamente impone che

$$(9.7) \quad a_{m_1+k_1d_1, \dots, m_N+k_Nd_N} = \rho(\tilde{u}) e^{-2\pi\sqrt{-1}\lambda(\tilde{u})} e^{\pi\sqrt{-1}\sum k_i d_i t_{ij} k_j + 2\pi\sqrt{-1}\sum m_i t_{ij} k_j} a_{m_1, \dots, m_N},$$

dove abbiamo posto $\tilde{u} = -\sum k_i \tilde{u}_i$. Quindi i coefficienti di Fourier a_{n_1, \dots, n_N} sono unicamente determinati da quelli per cui $0 \leq n_i < d_i$ per $i = 1, \dots, N$, che sono esattamente $\sqrt{\text{disc}(E)} = \prod_{i=1}^N d_i$. Mostriamo ora che, per ogni scelta dei coefficienti che verifichi le relazioni 9.7, la serie 9.6 converge assolutamente sui compatti, e così pure tutte le sue derivate termine a termine. Per linearità, basta dimostrarlo quando

$$\begin{aligned} a_{m_1, \dots, m_N} &= 1, \\ a_{n_1, \dots, n_N} &= 0 \quad \text{tranne quando } n_i \equiv m_i \pmod{d_i}, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

per un multiindice fissato m_1, \dots, m_N tale che $0 \leq m_i < d_i$ per ogni i . Il termine dominante del lato destro della formula 9.7 è $e^{\pi\sqrt{-1}\sum k_i d_i t_{ij} k_j}$, e per dimostrare la convergenza basta mostrare che la matrice $\text{Im}(\Delta T)$ è simmetrica definita positiva. Per farlo notiamo che

$$d_j \delta_{j\ell} = E(\tilde{u}_j, u_\ell) = \text{Im}(H(\tilde{u}_j, u_\ell)) = \sum_i \text{Im}(t_{ij} h_{i\ell}).$$

In altre parole, se indichiamo con H , per abuso di linguaggio, la matrice (h_{ij}) , allora

$${}^t \text{Im}(T)H = \Delta.$$

Dunque

$$\text{Im}(\Delta T) = {}^t \text{Im}(T)H \text{Im}(T),$$

che è positiva definita perchè lo è H , e perchè $\text{Im}(T)$ è invertibile. In conclusione, vale il seguente risultato.

TEOREMA 9.2. *Sia H una polarizzazione del toro $X = \mathbb{C}^N/\Lambda$, e sia ρ un moltiplicatore per H . Lo spazio delle funzioni theta rispetto ad H e a ρ ha dimensione*

$$\sqrt{\text{disc}(E)} = d_1 \dots d_N,$$

dove E è la parte immaginaria di H , vista come forma bilineare su $\Lambda \times \Lambda$, e d_1, \dots, d_N sono i divisori elementari di E . In altre parole, la dimensione dello spazio vettoriale $H^0(X, L(H, \rho))$ è $\sqrt{\text{disc}(E)}$.

ESEMPIO 9.3. (La Jacobiana come varietà abeliana) Sia C una curva di genere g . Il teorema di Abel dice che la Jacobiana di C è

$$J(C) = H^1(C, \mathcal{O})/H^1(C, \mathbb{Z}).$$

Come ora vedremo, la varietà Jacobiana è in modo naturale una varietà abeliana principalmente polarizzata. Se φ e ψ sono due (0,1)-forme su C e $[\varphi]$, $[\psi]$ le loro classi in $H^1(C, \mathcal{O})$, poniamo

$$H([\varphi], [\psi]) = \frac{2}{\sqrt{-1}} \int_C \varphi \wedge \bar{\psi}.$$

La forma bilineare H è hermitiana e definita positiva. Inoltre la parte immaginaria della sua restrizione a $H^1(C, \mathbb{Z}) \times H^1(C, \mathbb{Z})$ non è altro che la forma di intersezione cambiata di segno, ed è dunque intera. Infatti, se α e β sono forme differenziali che rappresentano classi reali, possiamo scrivere $\alpha = \varphi + \bar{\varphi}$, $\beta = \psi + \bar{\psi}$, dove φ e ψ sono forme di tipo $(0,1)$, e si ha che

$$\int_C \alpha \wedge \beta = \int_C \varphi \wedge \bar{\psi} + \int_C \bar{\varphi} \wedge \psi = 2 \operatorname{Re} \left(\int_C \varphi \wedge \bar{\psi} \right) = -\operatorname{Im} \left(\frac{2}{\sqrt{-1}} \int_C \varphi \wedge \bar{\psi} \right).$$

Ciò mostra che H definisce una polarizzazione su $J(C)$. Si tratta di una polarizzazione principale. In effetti, come si è osservato nel Capitolo 5, la matrice di intersezione relativa alla base $[\alpha_1], \dots, [\alpha_g], [\beta_1], \dots, [\beta_g]$ di $H^1(C, \mathbb{Z})$ costruita nello stesso capitolo è

$$\begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia ρ un moltiplicatore per H . Per fissare le idee possiamo scegliere ρ in modo che

$$\rho([\alpha_i]) = \rho([\beta_i]) = 1, \quad i = 1, \dots, g.$$

Il teorema 9.2 dice che lo spazio delle sezioni di $L(H, \rho)$ ha dimensione uno. Inoltre la discussione che precede l'enunciato del teorema 9.2 ci permette di scrivere esplicitamente una funzione theta su \mathbb{C}^g che rappresenta un generatore di $H^0(J(C), L(H, \rho))$.

Per ogni $z \in H^1(J(C), \mathcal{O})$ scriviamo $z = \sum z_i [\alpha_i]$ e

$$B(z, z) = \sum z_i z_j H([\alpha_i], [\alpha_j]) = \sum z_i z_j h_{ij}.$$

Un generatore di $H^0(J(C), L(H, \rho))$ è rappresentato da

$$\vartheta(z) = e^{\frac{\pi}{2} B(z, z)} \sum a_{n_1, \dots, n_g} e^{2\pi\sqrt{-1} \sum n_i z_i},$$

dove

$$a_{n_1, \dots, n_g} = e^{\pi\sqrt{-1} \sum n_i t_{ij} n_j}.$$

In conclusione

$$\vartheta(z) = e^{\frac{\pi}{2} \sum z_i z_j h_{ij}} \sum_{n_1, \dots, n_g \in \mathbb{Z}} e^{2\pi\sqrt{-1} \sum n_i z_i + \pi\sqrt{-1} \sum n_i t_{ij} n_j}.$$

La funzione $\vartheta(z)$, o piuttosto il suo quoziente per il fattore mai nullo $e^{\frac{\pi}{2} \sum z_i z_j h_{ij}}$, viene chiamata *funzione theta di Riemann* di C . Il suo divisore è un divisore periodico in \mathbb{C}^g , che è l'immagine inversa di un divisore in $J(C)$. Ciascuno di questi due oggetti equivalenti viene chiamato *divisore theta* di $J(C)$ (o di C). Uno dei nostri scopi nei prossimi capitoli sarà quello di studiare le relazioni tra la geometria del divisore theta e quella della curva C . Per il momento ci limitiamo a osservare che sia la funzione theta di Riemann sia il divisore theta sono ben definiti a meno di traslazioni in $J(C)$, che per la formula 8 corrispondono a cambiamenti di moltiplicatore.

Ora torniamo al problema di calcolare la dimensione dello spazio delle funzioni theta relative a una data forma hermitiana H e a un dato moltiplicatore ρ . Supponiamo dapprima che H sia nulla. In questo caso l'equazione funzionale si riduce a

$$\vartheta(z + u) = \rho(u) \vartheta(z).$$

Questa implica che ϑ è una funzione limitata su \mathbb{C}^N , e quindi una costante. Inoltre, se $\rho(u) \neq 1$ per qualche u , essa dice anche che ϑ deve essere identicamente nulla. Ora supponiamo che H sia *semidefinita* positiva. Sia W il sottospazio vettoriale complesso di \mathbb{C}^N consistente di tutti i vettori w tali che $H(w, z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}^N$. L'intersezione $W \cap \Lambda$ può essere descritta come l'insieme di tutti gli $u \in \Lambda$ tali che $E(u, v) = 0$ per ogni $v \in \Lambda$, ed è quindi un reticolo in W . Ogni funzione theta ϑ è costante su $W/W \cap \Lambda$; se ρ è non banale su $W \cap \Lambda$, ϑ si annulla identicamente su $W/W \cap \Lambda$. Inoltre, se $w \in W$, $u \in W \cap \Lambda$ e $z \in \mathbb{C}^N$, l'equazione funzionale soddisfatta da ϑ implica che

$$\vartheta(w + u + z) = \rho(u)\vartheta(w + z),$$

quindi $w \mapsto \vartheta(w + z)$ è una funzione theta su $W/W \cap \Lambda$ ed è costante o si annulla identicamente secondo che ρ sia banale su $W \cap \Lambda$ oppure no. In conclusione, sono possibili due casi:

- a) ρ è non banale su $W \cap \Lambda$; non vi sono funzioni theta non nulle.
- b) ρ è banale su $W \cap \Lambda$. Allora ϑ è costante su ogni classe laterale $W + z$. Inoltre è facile vedere che H proviene da una forma hermitiana definita positiva H' su \mathbb{C}^N/W la cui parte immaginaria è intera su $\Lambda/W \cap \Lambda$, e che ρ proviene da un moltiplicatore ρ' per H' . In questo caso ogni funzione theta su $X = \mathbb{C}^N/\Lambda$ si ottiene componendo la proiezione naturale $X \rightarrow X' = (\mathbb{C}^N/W)/(\Lambda/W \cap \Lambda)$ con una funzione theta su X' rispetto alla forma hermitiana H' e al moltiplicatore ρ' . La dimensione dello spazio di queste funzioni theta è data dal teorema 9.2.

L'ultima situazione da esaminare è quella in cui H è indefinita; vedremo che in questo caso ogni funzione theta è identicamente nulla. C'è un sottospazio W di \mathbb{C}^N sul quale H è definita negativa. Sia ϑ una funzione theta relativa ad H e ρ . Come si è mostrato nel Capitolo 8, la funzione

$$\psi(z) = e^{-\pi H(z, z)} |\vartheta(z)|^2$$

è limitata su \mathbb{C}^N . È semplice mostrare che la restrizione di ψ a ogni traslato di W è plurisubarmonica, ed anzi è strettamente plurisubarmonica dove ϑ non si annulla. Ricordiamo infatti che una funzione liscia F di variabili complesse ζ_1, \dots si dice *plurisubarmonica* se la matrice Hessiana complessa

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \partial \bar{\zeta}_j} \right)$$

è semidefinita positiva, e *strettamente plurisubarmonica* se questa stessa matrice è definita positiva. Sia z_0 un punto di \mathbb{C}^N , e siano w_1, \dots, w_k coordinate lineari su W . La restrizione della funzione ψ a $W + z_0$, come si verifica subito, è della forma

$$\psi(w + z_0) = e^{\sum \tilde{h}_{ij} w_i \bar{w}_j} |f(w)|^2,$$

dove (\tilde{h}_{ij}) è una matrice hermitiana definita positiva e f è una funzione olomorfa ottenuta moltiplicando $\vartheta(w + z_0)$ per una funzione olomorfa mai nulla. D'altra parte, l'Hessiana complessa di una funzione della forma $e^{u(w)}$ è

$$e^u \left(\frac{\partial u}{\partial w_i} \frac{\partial u}{\partial \bar{w}_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial w_i \partial \bar{w}_j} \right)_{i, j=1, \dots, k} \geq e^u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial w_i \partial \bar{w}_j} \right)_{i, j=1, \dots, k}.$$

Se scriviamo $\psi(w + z_0)$ come esponenziale di $\sum \tilde{h}_{ij} w_i \bar{w}_j + \log f(w) + \log \bar{f}(w)$, ciò mostra che l'Hessiana complessa di $\psi(w + z_0)$ è maggiore o uguale di

$$\psi(w + z_0) (\tilde{h}_{ij})_{i,j=1,\dots,k},$$

ed è quindi semidefinita positiva ovunque, e definita positiva dove ψ non si annulla, cioè dove ϑ non si annulla. Alla stessa stregua, se ε è sufficientemente piccolo, anche

$$\tilde{\psi}(z) = e^{-\varepsilon \sum |z_i|^2} \psi(z)$$

è plurisubarmonica su ogni traslato di W , e strettamente tale dove ϑ non si annulla. Però $\tilde{\psi}$ si annulla all'infinito, e quindi ha un massimo. D'altra parte, in un punto di massimo, l'Hessiana complessa di $\tilde{\psi}$ è semidefinita negativa. Per quanto si è appena detto, ciò è possibile solo se nel punto in questione ϑ si annulla, e quindi se ϑ è identicamente nulla.

OSSERVAZIONE 9.4. Siano Δ , T e $H = (h_{ij})$ come nel lemma 9.1 e nella formula 9.3. Abbiamo mostrato che la parte immaginaria di ΔT è simmetrica. Mostriamo che ciò è vero anche per la parte reale di ΔT . Sappiamo che

$$(9.8) \quad H \operatorname{Im}(T) = \Delta.$$

Inoltre, se scriviamo

$$\sqrt{-1}u_i = \sum_j a_{ji}u_j + \sum_j b_{ji}\tilde{u}_j,$$

dove $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ sono matrici reali, concludiamo che

$$A + \operatorname{Re}(T)B = 0, \quad \operatorname{Im}(T)B = I.$$

Quindi $\operatorname{Re}(T) = -A \operatorname{Im}(T)$. D'altra parte

$$\begin{aligned} \sum \operatorname{Re}(t_{ij})h_{ik} &= \operatorname{Re} H(\tilde{u}_j, u_k) = -E(\tilde{u}_j, \sqrt{-1}u_k) \\ &= -\sum_i a_{ik}E(\tilde{u}_j, u_i) = -\sum_j d_j a_{jk}. \end{aligned}$$

In altre parole, ${}^t\operatorname{Re}(T)H = -\Delta A$. Dunque $\Delta A \operatorname{Im}(T) = -{}^t\operatorname{Re}(T)H \operatorname{Im}(T) = -{}^t\operatorname{Re}(T)\Delta$, o anche $\Delta \operatorname{Re}(T) = {}^t\operatorname{Re}(T)\Delta$, cioè $\Delta \operatorname{Re}(T)$ è simmetrica. In conclusione:

ΔT è una matrice simmetrica con parte immaginaria definita positiva.

Questa affermazione va sotto il nome di *relazioni bilineari di Riemann*. Possiamo darne una versione più intrinseca come segue. Date una base v_1, \dots, v_{2N} di Λ e una base b_1, \dots, b_N di \mathbb{C}^N , poniamo

$$\begin{aligned} v_j &= \sum \omega_{ij} b_i, & \Omega &= (\omega_{ij}), \\ q_{ij} &= E(v_i, v_j), & Q &= (q_{ij}). \end{aligned}$$

Con la nostra scelta di basi

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega = (I, T).$$

La simmetria di ΔT è equivalente a

$$(9.9) \quad \Omega Q^{-1} {}^t\Omega = 0,$$

e la positività della parte immaginaria di ΔT a

$$(9.10) \quad \sqrt{-1} \Omega Q^{-1} {}^t\bar{\Omega} > 0.$$

Queste affermazioni sono chiaramente invarianti per cambiamenti di base in Λ e \mathbb{C}^N . Esse vanno sotto il nome di *prima e seconda relazione bilineare di Riemann*.

9.1. Immersioni proiettive

Sia X una varietà complessa compatta. Come per le superficie di Riemann, possiamo parlare di *sistemi lineari* su X , cioè proiettivizzati $|V| = \mathbb{P}V$ di sottospazi vettoriali $V \subset H^0(X, L)$, dove L è un fibrato in rette, e delle applicazioni in spazi proiettivi ad esse associate. L'applicazione definita da $|V|$ è data da

$$\Phi_{|V|}(x) = \{s \in V : s(x) = 0\} \in \mathbb{P}V^\vee.$$

Naturalmente questo ha senso solo se non tutti gli elementi di V si annullano in x , e quindi quella che abbiamo appena definita è una mappa

$$\Phi_{|V|} : X \setminus B \rightarrow \mathbb{P}V^\vee,$$

dove B è il *luogo base* di $|V|$, cioè il luogo dei punti dove tutti gli elementi di V si annullano (i *punti base* di $|V|$).

Se identifichiamo V a \mathbb{C}^{n+1} scegliendone una base s_0, \dots, s_n , la mappa $\Phi_{|V|}$ si identifica a

$$x \mapsto [s_0(x) : \dots : s_n(x)] = [\zeta(s_0(x)) : \dots : \zeta(s_n(x))],$$

dove ζ è una qualsiasi coordinata di fibra per L nell'intorno di x .

La mappa $\Phi_{|V|}$ è definita su tutta X se non esistono punti di X dove tutti gli elementi di V si annullano. Inoltre $\Phi_{|V|}$ è iniettiva se e solo se, dati comunque due punti distinti x e y di $X \setminus B$, c'è una sezione di V che si annulla in x ma non in y , e viceversa. Infine, $\Phi_{|V|}$ è una immersione locale se e solo se, per ogni punto $x \in X \setminus B$ e ogni vettore tangente non nullo v in x , c'è una sezione $s \in V$ tale che

$$s(x) = 0, \quad v(\zeta \circ s) \neq 0,$$

dove ζ è una coordinata di fibra per L su un intorno di x .

Se $\Phi_{|V|}$ ha queste tre proprietà, definisce un isomorfismo da X a una sottovarietà liscia dello spazio proiettivo n -dimensionale. Applichiamo queste considerazioni ai tori complessi.

TEOREMA 9.5 (Teorema di Lefschetz). *Sia $L = L(H, \rho)$ un fibrato in rette sul toro complesso $X = \mathbb{C}^N / \Lambda$. Supponiamo che H sia definita positiva. Allora $\Phi_{|L^3|}$ è una immersione di X in uno spazio proiettivo.*

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema 9.2, L ha almeno una sezione non nulla; sia ϑ la corrispondente funzione theta. Il teorema del quadrato, cioè la formula 8, implica che, per ogni scelta di $x, y \in \mathbb{C}^N$,

$$(9.11) \quad \xi(z) = \vartheta(z+x)\vartheta(z+y)\vartheta(z-x-y)$$

rappresenta una sezione di L^3 . Dato z , se scegliamo x e y in modo che ϑ non si annulli in $z+x$, $z+y$ e $z-x-y$, allora ξ non si annulla in z . Ciò mostra che $\Phi_{|L^3|}$ è definita ovunque.

Ora siano a e b due punti di \mathbb{C}^N le cui immagini in X non sono separate da $\Phi_{|L^3|}$. Ciò significa che esiste una costante non nulla k tale che $\eta(a) = k\eta(b)$ per ogni funzione theta η relativa a $(3H, \rho^3)$. In particolare, per ogni scelta di z e w e per ogni funzione theta ϑ relativa a (H, ρ) ,

$$\vartheta(a+z)\vartheta(a+w)\vartheta(a-z-w) = k\vartheta(b+z)\vartheta(b+w)\vartheta(b-z-w).$$

Teniamo w fisso in questa identità e calcoliamo i differenziali logaritmici dei due lati rispetto a z . Otteniamo

$$d_z \log \vartheta(a+z) - d_z \log \vartheta(a+z-w) = d_z \log \vartheta(b+z) - d_z \log \vartheta(b+z-w),$$

il che implica, in particolare, che

$$d \log \frac{\vartheta(a+z)}{\vartheta(b+z)} = d \log \vartheta(a+z) - d \log \vartheta(b+z)$$

è un differenziale invariante per traslazione, e quindi della forma $\sum \alpha_i dz_i$, dove gli α_i sono costanti. La conclusione è che

$$\vartheta(z+a) = ke^{\sum \alpha_i z_i} \vartheta(z+b),$$

o anche che

$$(9.12) \quad \vartheta(z+a-b) = ke^{-\sum \alpha_i b_i} e^{\sum \alpha_i z_i} \vartheta(z).$$

Ciò implica che $\tau_{a-b}^* L(H, \rho) = L(H, \rho)$, cioè che $E(a-b, u)$ è un intero per ogni $u \in \Lambda$. In particolare, il sottogruppo di \mathbb{C}^N generato da Λ e $a-b$ è un reticolo Λ' , dato che E è non degenere. Il quasicarattere ρ può essere esteso in un numero finito di modi a un quasicarattere ρ' su Λ' ; se $\pi : X = \mathbb{C}^N/\Lambda \rightarrow X' = \mathbb{C}^N/\Lambda'$ è la proiezione naturale, il fibrato in rette $\pi^* L(H, \rho')$ è isomorfo a $L(H, \rho)$ per ogni scelta di ρ' . Inoltre la formula 9.12 mostra che ogni sezione di $L(H, \rho)$ proviene da una sezione di $L(H, \rho')$ per qualche ρ' . Dunque $H^0(X, L(H, \rho))$ e $H^0(X', L(H, \rho'))$ hanno la stessa dimensione. Il teorema 9.2 dice allora che $\Lambda' = \Lambda$, cioè che $a-b \in \Lambda$, o ancora che a e b rappresentano lo stesso punto di X .

Resta da mostrare che $\Phi|_{L|}$ è una immersione locale. Supponiamo che ciò non accada in qualche punto $a \in \mathbb{C}^N$. Ci sono dunque un vettore tangente non nullo v e una costante k tali che $k\eta(a) = v(\xi)(a)$, cioè tali che $k = v(\log \xi)(a)$, per ogni funzione theta ξ relativa a $(3H, \rho^3)$. In particolare, se scegliamo una funzione ξ della forma 9.11 e poniamo $f = v(\log \vartheta)$, questo dice che

$$f(a+x) + f(a+y) + f(a-x-y) = k,$$

per ogni coppia di punti $x, y \in \mathbb{C}^N$, cioè che

$$(9.13) \quad f(x) + f(y) = k - f(3a-x-y)$$

per ogni scelta di x e y . Questa identità mostra, in particolare, che $f(3a-x) = -f(x) - f(0) + k$. Dunque dalla relazione 9.13 si ricava che $f(x) + f(y) = f(x+y) + f(0)$, cioè che $x \mapsto f(x) - f(0)$ è additiva e quindi lineare, in quanto olomorfa. Ne segue che f è una applicazione affine. Ora scriviamo $v = \sum c_i \partial/\partial z_i$ e poniamo $c = (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{C}^N$. Integrando

$$\frac{d}{dw} \log \vartheta(z+wc) = v(\log \vartheta)(z+wc) = f(z+wc)$$

ed esponenziando otteniamo

$$\vartheta(z+wc) = e^{wf(z)+mw^2} \vartheta(z),$$

dove m è una costante. Questa uguaglianza vale per ogni $z \in \mathbb{C}^N$ e ogni $w \in \mathbb{C}$. Ne segue che $\tau_{wc}^* L(H, \rho) = L(H, \rho)$, e quindi che $E(wc, u)$ è intero per ogni $u \in \Lambda$ e per ogni $w \in \mathbb{C}$, e perciò nullo. Ciò è in contraddizione con l'ipotesi che H sia definita positiva, dalla quale segue che E è non degenere. La dimostrazione del teorema 9.5 è completa. \square

Abbiamo mostrato che un toro complesso che possiede una polarizzazione è isomorfo a una sottovarietà liscia di uno spazio proiettivo. Cosa possiamo dire di un toro X su cui c'è un fibrato in rette $L(H, \rho)$ tale che H sia semidefinita positiva e abbia rango p ? Abbiamo visto nel Capitolo 9 che vi è un quoziente p -dimensionale di X che è una varietà abeliana; quindi c'è una applicazione olomorfa, ovunque di rango p , da X a una sottovarietà liscia p -dimensionale di uno spazio proiettivo.

Tornando al teorema di Lefschetz, osserviamo che $\Phi_{|L^3|}(X)$ è una sottovarietà algebrica di $\mathbb{P}H^0(X, L^3)^\vee$. In effetti il teorema di Chow già ricordato nel Capitolo 4 dice che ogni sottovarietà analitica chiusa di uno spazio proiettivo è algebrica. Come abbiamo annunciato, ciò verrà dimostrato nel prossimo capitolo, sotto l'ipotesi aggiuntiva che si abbia a che fare con una varietà non singolare.

Funzioni meromorfe

Siano f e g due funzioni oloomorfe su un aperto di \mathbb{C}^N . Diremo che f e g sono *relativamente prime in un punto x* se lo sono, nell'anello delle serie di potenze convergenti, i loro sviluppi di Taylor nel punto x . Come è immediato verificare, questa nozione è del tutto indipendente dalla scelta delle coordinate, e quindi si traspone senza cambiamenti al caso in cui f e g siano funzioni oloomorfe su un aperto di una varietà complessa. Ci serviremo del seguente risultato, per il quale rimandiamo, ad esempio, a [5].

FATTO 10.1. *Se le funzioni oloomorfe f e g sono relativamente prime in x , lo sono in ogni punto di un intorno di x .*

Una *frazione meromorfa* su un aperto U di una varietà complessa è una frazione f/g , dove f e g sono oloomorfe e relativamente prime in ogni punto di U e g non è identicamente nulla su alcuna componente connessa di U . Una frazione meromorfa determina f e g , a meno di moltiplicazione di entrambe per una stessa funzione oloomorfa mai nulla.

Sia X una varietà complessa connessa. Una *funzione meromorfa* su X è data da un ricoprimento $\{U_i\}$ di X con aperti coordinati e da una collezione $\{f_i\}$ di frazioni meromorfe sugli U_i tali che, per ogni scelta di i e j , le restrizioni di f_i e f_j a $U_i \cap U_j$ coincidono. Due di questi insiemi di dati, $(\{U_i\}, \{f_i\})$ e $(\{V_i\}, \{g_i\})$, danno la stessa funzione meromorfa se le restrizioni di f_i e g_i a $U_i \cap V_j$ coincidono per ogni scelta di i e j . Le funzioni meromorfe si possono sommare e moltiplicare, ed è facile mostrare che formano un campo $K(X)$, il cosiddetto *campo delle funzioni* di X .

Un *divisore* su X è una combinazione lineare formale a coefficienti interi

$$D = \sum_Y m_Y Y,$$

dove Y varia tra tutti i sottoinsiemi analitici irriducibili di X di codimensione 1, che sia localmente finita; ciò significa che ogni punto di X ha un intorno il quale ha intersezione non vuota con al più di un numero finito di sottoinsiemi Y tali che $m_Y \neq 0$. Se U è aperto in X e Y è un sottoinsieme analitico di codimensione 1 in X , la restrizione di Y a U , che indichiamo con $Y|_U$, è il divisore somma delle componenti di $Y \cap U$. La restrizione di D a U è definita come $D|_U = \sum m_Y Y|_U$. Diremo che D è *effettivo* se tutti gli m_i sono non negativi. Se $D = \sum m_Y Y$ ed $E = \sum n_Y Y$ sono due divisori su X scriveremo $E \leq D$ per significare che $n_Y \leq m_Y$ per ogni Y .

Il luogo degli zeri e il luogo dei poli di una frazione meromorfa f/g (cioè, rispettivamente, i luoghi dei punti dove f e g si annullano) non cambiano quando f e g vengono moltiplicate per una stessa funzione mai nulla. Quindi ha senso parlare del luogo degli zeri e del luogo dei poli di una funzione meromorfa h su X ; si tratta di sottoinsiemi analitici di X di codimensione 1. Sia Y una componente irriducibile

del luogo degli zeri (o dei poli) di h . La molteplicità con cui h si annulla lungo Y (o ha un polo lungo Y) ha anch'essa significato intrinseco. Quindi possiamo definire il *divisore degli zeri* Z_h e il *divisore dei poli* P_h di h come segue

$$Z_h = \sum m_Z Z, \quad P_h = \sum m_P P,$$

dove Z e P variano, rispettivamente, tra le componenti irriducibili del luogo degli zeri e del luogo dei poli di h , e m_Z e m_P denotano, rispettivamente, l'ordine di zero o di polo di h lungo Z o P . Il *divisore di h* è

$$(h) = P_h - Z_h.$$

Un divisore si dice *principale* se è il divisore di una funzione meromorfa. Si dice che due divisori sono *linearmente equivalenti* se la loro differenza è principale. Sia D un divisore su X . Ricopriamo X con aperti U_i . Se questi sono sufficientemente piccoli, possiamo trovare su ognuno di essi una funzione meromorfa h_i su U_i che definisce D , nel senso che il divisore di h_i è la restrizione di D a U_i . Il fibrato in rette associato a D , che indicheremo con L_D , è il fibrato le cui funzioni di transizione, rispetto al ricoprimento $\{U_i\}$, sono le h_j/h_i . Sia k una funzione meromorfa su X tale che $(k) \leq D$. Possiamo associare a k una sezione $\{s_i\}$ di L_D ponendo

$$s_i = \frac{k}{h_i}.$$

È immediato verificare che ciò stabilisce un isomorfismo tra lo spazio vettoriale delle sezioni di L_D e quello delle funzioni meromorfe su X il cui divisore sia $\leq D$. Segue direttamente dalle definizioni che, se D e D' sono divisori su X , allora $L_{D+D'}$ è isomorfo a $L_D \otimes L_{D'}$, e inoltre che L_D è banale se e solo se D è principale. In altre parole, due divisori sono linearmente equivalenti se e solo se i corrispondenti fibrati in rette sono isomorfi.

Una delle conseguenze del teorema 8.3 è che, su un toro complesso X , ogni funzione meromorfa è quoziente di due funzioni theta relative alla medesima forma hermitiana e allo stesso moltiplicatore. Infatti una funzione meromorfa f su X può essere vista come una sezione olomorfa di L_{P_f} ; un'altra sezione di L_{P_f} "è" la funzione 1. D'altra parte le funzioni f e 1, viste come sezioni di L_{P_f} , sono rappresentate da funzioni theta ϑ_1 e ϑ_2 ; chiaramente, $f = \vartheta_1/\vartheta_2$.

I risultati principali di questo capitolo sono i seguenti.

TEOREMA 10.2. *Sia X una varietà complessa compatta e connessa di dimensione N . Allora $K(X)$ è una estensione finitamente generata di \mathbb{C} con grado di trascendenza al più N .*

PROPOSIZIONE 10.3. *Sia $X = \mathbb{C}^N/\Lambda$ un toro complesso. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- i) *il grado di trascendenza di $K(X)$ su \mathbb{C} è almeno p ;*
- ii) *esiste una forma hermitiana semidefinita positiva su \mathbb{C}^N con almeno p autovalori positivi la cui parte immaginaria è intera su Λ .*

Dimostreremo per prima la proposizione 10.3, supponendo dimostrato il teorema 10.2. In effetti non avremo bisogno di usare quest'ultimo risultato in tutta la sua forza, ma ci basterà la limitazione sul grado di trascendenza di $K(X)$ su \mathbb{C} . Si è visto che, se vale ii), allora vi è una mappa suriettiva da X a una sottovarietà algebrica S di dimensione almeno p in uno spazio proiettivo \mathbb{P}^m . L'anello R delle

coordinate di S è il quoziente dell'anello $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_m]$ modulo l'ideale di tutti i polinomi che si annullano su S . Il campo delle funzioni meromorfe su S è (a noi serve solo "contiene", il che è ovvio) il campo costituito dai quozienti di elementi omogenei dello stesso grado di R . Il grado di trascendenza di $K(S)$ è pari alla dimensione di S ; d'altra parte, $K(S)$ si identifica, per pullback, a un sottocampo di $K(X)$, e quindi vale i).

Viceversa, siano f_1, \dots, f_p funzioni meromorfe algebricamente indipendenti su X . Per ogni i , sia D_i il divisore dei poli di f_i . Il fibrato in rette $L = L_{D_1 + \dots + D_p}$ è della forma $L(H, \rho)$, dove H è semidefinita positiva dato che L ha sezioni non nulle. Supponiamo che H abbia meno di p autovalori positivi. Allora, come si è mostrato nella Sezione 9.1, vi sono una varietà abeliana Y di dimensione inferiore a p , un morfismo suriettivo $X \rightarrow Y$ e un fibrato in rette M su Y il cui pullback a X è L (usiamo ancora il fatto che L ha sezioni). D'altra parte, come si è osservato, f_i è un quoziente ϑ_i/η_i di funzioni theta rispetto a H e ρ . Come si è mostrato nella Sezione 9.1, ϑ_i e η_i sono pullback di sezioni di M , e quindi le f_i provengono da funzioni meromorfe algebricamente indipendenti su Y , in contraddizione con il teorema 10.2.

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema 10.2, che è del tutto elementare e si basa sulla seguente versione del lemma di Schwarz.

LEMMA 10.4. *Sia f una funzione olomorfa su un intorno del polcilindro chiuso $P = \{(z_1, \dots, z_n) : |z_i| \leq 1, i = 1, \dots, n\}$ che si annulla di ordine h nell'origine. Indichiamo con M il massimo di $|f|$ su P . Allora*

$$|f(z_1, \dots, z_n)| \leq M(\max_i |z_i|)^h \quad \text{per ogni } (z_1, \dots, z_n) \in P.$$

Per dimostrare il lemma ci si può ridurre al caso $n = 1$, restringendo f a ognuna delle rette passanti per l'origine. Per $n = 1$ la funzione $f(z)/z^h$ è olomorfa e ha modulo limitato da M , per il principio del massimo. Ne segue la tesi.

Dimostreremo solo la prima parte del teorema 10.2, cioè l'affermazione sul grado di trascendenza di $K(X)$ su \mathbb{C} . Siano f_1, \dots, f_{N+1} funzioni meromorfe su X . Poiché X è compatto possiamo trovare tre ricoprimenti aperti $\{U_x\}$, $\{V_x\}$, $\{W_x\}$ di X , dove x varia in un sottinsieme *finito* I di X , con le seguenti proprietà:

- i) $U_x \supset \bar{V}_x \supset \bar{W}_x$ per ogni x ;
- ii) $x \in W_x$ per ogni x ;
- iii) per ogni x vi sono funzioni olomorfe $P_{i,x}$ e $Q_{i,x}$, prime fra loro in ogni punto di U_x , tali che

$$f_i = \frac{P_{i,x}}{Q_{i,x}} \quad \text{su } U_x;$$

- iv) per ogni x vi è un sistema di coordinate $(z_{1,x}, \dots, z_{N,x})$ su U_x , centrato in x , tale che $V_x = \{|z_{i,x}| < 1, i = 1, \dots, N\}$ e $W_x = \{|z_{i,x}| < 1/2, i = 1, \dots, N\}$.

Indicheremo con r la cardinalità di I . La condizione iii) implica che

$$\varphi_{i,x,y} = \frac{Q_{i,x}}{Q_{i,y}}$$

è olomorfa e mai nulla in $U_x \cap U_y$, e limitata in $V_x \cap V_y$. Poniamo

$$\varphi_{x,y} = \prod_i \varphi_{i,x,y},$$

$$C = \max_{x,y} \max_{V_x \cap V_y} |\varphi_{x,y}|.$$

La costante C è maggiore o uguale di 1 poiché $\varphi_{x,y}\varphi_{y,x} = 1$.

Sia F un polinomio in $N + 1$ variabili, e sia ℓ il suo grado. Scriviamo

$$F(f_1, \dots, f_N, f_{N+1}) = \frac{R_x}{Q_x^\ell}$$

su U_x , dove $Q_x = \prod Q_{i,x}$ e R_x è olomorfa. Dobbiamo mostrare che esiste un polinomio F non nullo tale che $F(f_1, \dots, f_{N+1})$ sia identicamente nulla. Notiamo innanzitutto che, fissato comunque h , si può far sì che l'ordine di annullamento di R_x in x sia almeno h per ogni x . Infatti dire che R_x si annulla con ordine h in x equivale a dire che tutte le derivate di R_x di ordine inferiore a h si annullano in x . Queste sono tutte condizioni lineari sui coefficienti di F , e ve ne sono $\binom{h+N-1}{N}$. Complessivamente, dunque, chiedere che R_x si annulli con ordine h in x per ogni x equivale a imporre $r \binom{h+N-1}{N}$ condizioni lineari sui coefficienti di F . D'altra parte la dimensione dello spazio dei polinomi di grado ℓ in $N + 1$ variabili è $\binom{\ell+N+1}{N+1}$, e

$$\binom{\ell + N + 1}{N + 1} > r \binom{h + N - 1}{N}$$

se ℓ è sufficientemente grande. Ora poniamo

$$M = \max_x \max_{V_x} |R_x|.$$

Dato che $R_x = \varphi_{x,y}^\ell R_y$ e che i W_x ricoprono X , si conclude, usando il lemma 10.4 e la proprietà iv) dei ricoprimenti scelti, che

$$M \leq \frac{C^\ell}{2^h} M.$$

Dato che il termine di sinistra della formula 10 ha grado $N + 1$ in ℓ e il termine di destra ha grado N in h , se h è abbastanza grande si può trovare un ℓ tale che valga la relazione 10 e che $C^\ell < 2^h$, cioè che $\ell \log_2 C < h$. Segue allora dalla 10 che $M = 0$, cioè che $F(f_1, \dots, f_{N+1})$ è identicamente nulla.

Considerazioni simili, che qui omettiamo, mostrerebbero anche che, se l'insieme $\{f_1, \dots, f_N\}$ contiene una base di trascendenza di $K(X)$ su \mathbb{C} , allora il grado di F può essere maggiorato in modo indipendente da f_{N+1} , il che implica che $K(X)$ è finitamente generato su $\mathbb{C}(f_1, \dots, f_N)$, e quindi su \mathbb{C} . Ciò completerebbe la dimostrazione del teorema 10.2.

OSSERVAZIONE 10.5. Una delle conseguenze del teorema 10.2 è il teorema di Chow per sottovarietà complesse chiuse e lisce di spazi proiettivi. Sia V una tale varietà; il teorema afferma che essa è una sottovarietà algebrica dello spazio proiettivo ambiente. Per dimostrarlo possiamo supporre che V sia connessa. Indichiamo con n la dimensione di V e con Y il più piccolo sottinsieme algebrico dello spazio proiettivo contenente V , vale a dire l'intersezione di tutti i sottinsiemi algebrici che contengono V . Vogliamo mostrare che $V = Y$. La varietà Y è irriducibile; in effetti, se il prodotto PQ di due polinomi omogenei si annulla su V , uno tra P e Q si annulla su un sottinsieme aperto di V , e quindi su tutta V . Ogni funzione razionale

su Y dà per restrizione una funzione meromorfa su V . Segue dal teorema 10.2 che il campo delle funzioni razionali di Y non può avere grado di trascendenza su \mathbb{C} superiore a n ; dunque Y ha dimensione n . D'altra parte Y è uno spazio complesso irriducibile (si può mostrare che l'irriducibilità algebrica implica quella analitica) di dimensione n contenente la sottovarietà n -dimensionale V , e deve quindi coincidere con questa.

Sia X un toro complesso di dimensione N . Il teorema 10.2 afferma in particolare che il grado di trascendenza di $K(X)$ su \mathbb{C} non supera N . Sappiamo già che per $N = 1$ questo grado vale 1; mostreremo invece con esempi che, se $N > 1$, esso può essere qualsiasi intero compreso tra 0 e N . Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione $2N$, e sia Λ un reticolo in V . Una *struttura complessa* su V è un automorfismo J di V tale che $J^2 = -1$; V diviene uno spazio vettoriale complesso se, per ogni numero complesso $z = a + \sqrt{-1}b$ e ogni elemento v di V , si pone $zv = av + bJ(v)$. Ciò rende V/Λ un toro complesso.

Sia E una forma bilineare antisimmetrica su V la cui restrizione a Λ sia intera, e sia J una struttura complessa su V . Come si è visto nel Capitolo 8, una condizione necessaria e sufficiente perchè E rappresenti la classe di Chern di un fibrato in rette su V/Λ è che E sia la parte immaginaria di una forma hermitiana H , cioè che

$$E(Ju, Jv) = E(u, v)$$

per ogni scelta di u e v in V . Se $N \geq 2$ e $E \neq 0$ questa condizione non è soddisfatta per J appartenente a un sottoinsieme aperto denso dello spazio di tutte le strutture complesse su V . D'altra parte c'è solo una infinità numerabile di forme bilineari su V che siano intere su Λ , e quindi il teorema di Baire implica che sulla "maggior parte" dei tori complessi di dimensione 2 o più non vi sono fibrati in rette olomorfi con classe di Chern non nulla. Ne segue che sulla "maggior parte" dei tori complessi di dimensione 2 o più il solo fibrato in rette con sezioni non nulle è quello banale o, equivalentemente, non vi sono divisori effettivi non nulli, e quindi non vi sono funzioni meromorfe non costanti.

Per il momento si è visto che, per tori di dimensione almeno 2, si possono presentare almeno due casi estremi: il campo $K(X)$ può avere grado di trascendenza su \mathbb{C} pari alla dimensione di X , come accade ad esempio per i prodotti di curve ellittiche, o nullo. Costruiremo ora un toro di dimensione 2 il cui campo delle funzioni meromorfe ha grado di trascendenza 1 sul campo complesso. Per ogni intero $N > 1$ e ogni intero p compreso tra 1 e N , un prodotto opportuno di copie di questo toro, di tori bidimensionali senza funzioni meromorfe non banali e di curve ellittiche fornisce dunque un esempio di toro complesso N -dimensionale il cui campo delle funzioni ha grado di trascendenza p su \mathbb{C} . Sia Λ il reticolo in \mathbb{C}^2 generato da

$$(1, 0), (\sqrt{-1}, 0), (0, 1), (\alpha, \beta),$$

dove β non è reale, e poniamo $X = \mathbb{C}^2/\Lambda$. C'è una mappa suriettiva

$$\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z})$$

che proviene dalla proiezione $(z, w) \mapsto w$. Quindi $K(X)$ ha grado di trascendenza almeno 1 su \mathbb{C} . Ora vedremo che, per una scelta generica di α e β , questo grado vale esattamente 1. Lo faremo mostrando che, in generale, il sottospazio vettoriale $\{w = 0\}$ di \mathbb{C}^2 non ha sottospazi complementari W tali che $W \cap \Lambda$ sia un reticolo in W ; questo sarebbe vero in una varietà abeliana, dove potremmo prendere come

W il complemento ortogonale di $\{w = 0\}$ rispetto a una forma hermitiana definita positiva la cui parte immaginaria sia intera su Λ .

Se un sottospazio W con le proprietà richieste esistesse, sarebbe generato da un vettore

$$v = a(1, 0) + b(\sqrt{-1}, 0) + c(0, 1) + d(\alpha, \beta) = (a + \sqrt{-1}b + d\alpha, c + d\beta),$$

dove a, b, c, d sono interi, e ci sarebbe un numero complesso non reale λ tale che $\lambda v \in \Lambda$. Ciò implicherebbe innanzitutto che $\lambda \in \mathbb{Q}(\beta)$, e poi che

$$\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \lambda) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \beta).$$

Ciò non è vero in generale, ad esempio per $\beta = \sqrt{-1}$, $\alpha = \sqrt{2}$.

Nella discussione dell'esempio che abbiamo appena costruito abbiamo implicitamente usato il teorema di completa riducibilità di Poincaré, e ne abbiamo anche accennato la dimostrazione. Un omomorfismo $X \rightarrow Y$ tra tori complessi si dice una *isogenia* se è suriettivo e ha nucleo finito.

TEOREMA 10.6 (Completa riducibilità). *Sia X una varietà abeliana, e A una sua sottovarietà abeliana. Allora c'è una sottovarietà abeliana B di X tale che la mappa naturale $A \times B \rightarrow X$ sia una isogenia.*

La dimostrazione del teorema è semplice. Se scriviamo $X = \mathbb{C}^N/\Lambda$, dove Λ è un reticolo, allora $A = V/(V \cap \Lambda)$, dove V è un sottospazio vettoriale di \mathbb{C}^N e $V \cap \Lambda$ un reticolo in V . Scegliamo una forma hermitiana su \mathbb{C}^N che dia una polarizzazione su X , e sia V^\perp il complemento ortogonale di V . Allora $V^\perp \cap \Lambda$ è un reticolo in V^\perp e si può porre $B = V^\perp/(V^\perp \cap \Lambda)$.

Geometria del divisore theta

Sia C una superficie di Riemann compatta e connessa di genere $g \geq 2$. Sia $X = J(C)$ la Jacobiana di C , e sia H la polarizzazione standard su X :

$$H(\omega, \omega') = \frac{2}{\sqrt{-1}} \int_C \omega \wedge \overline{\omega'}.$$

Come di consueto, E denota la parte immaginaria di H . Scegliamo una base $u_1, \dots, u_g, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_g$ di $H^1(C, \mathbb{Z})$ tale che

$$\begin{aligned} E(u_i, u_j) &= E(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j) = 0, \\ E(\tilde{u}_i, u_j) &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

per ogni scelta di i e j . Scriviamo anche, come di consueto,

$$\tilde{u}_j = \sum_i t_{ij} u_i.$$

La funzione theta di Riemann di C è

$$\vartheta(z) = \sum_{n_1, \dots, n_g \in \mathbb{Z}} e^{2\pi\sqrt{-1} \sum n_i z_i + \pi\sqrt{-1} \sum n_i t_{ij} n_j}.$$

Sia $\Theta \subset J(C)$ il divisore theta di C , cioè il divisore degli zeri di $\vartheta(z)$. Osserviamo che ϑ è una funzione pari, cioè che $\vartheta(-z) = \vartheta(z)$. Ne segue che Θ è invariante per l'involuzione $x \mapsto -x$ di $J(C)$, cioè che $-\Theta = \Theta$.

La scelta di un punto base $q \in C$ determina una applicazione di Abel-Jacobi $\psi_q : C \rightarrow X$. Sia $C^{(r)}$ il prodotto simmetrico r -esimo di C , cioè il quoziente di C^r modulo l'azione del gruppo simmetrico, che nel nostro caso è una varietà liscia. Scriveremo i punti di $C^{(r)}$ come somme formali $p_1 + \dots + p_r$. La mappa ψ_q può essere estesa a

$$\psi_q^{(r)} : C^{(r)} \rightarrow X$$

definita da

$$\psi_q^{(r)}(p_1 + \dots + p_r) = \psi_q(p_1) + \dots + \psi_q(p_r).$$

Scriveremo $\psi^{(r)}$, ψ_q o ψ invece di $\psi_q^{(r)}$ quando non c'è rischio di confusione.

LEMMA 11.1. *Sia $\omega_1, \dots, \omega_g$ una base per i differenziali abeliani su C . Siano p_1, \dots, p_r punti distinti di C , e m_1, \dots, m_r interi positivi. Per ogni i , sia w_i una coordinata locale su un intorno di p_i . Scriviamo $\omega_i = \alpha_{ij} dw_j$ su un intorno di p_i .*

Allora

$$h^1(C, \mathcal{O}(\sum m_i p_i)) = g - \text{rango} \begin{pmatrix} \alpha_{11}(p_1) & \alpha'_{11}(p_1) & \cdots & \alpha_{11}^{(m_1-1)}(p_1) & \alpha_{12}(p_2) & \cdots & \alpha_{1r}^{(m_r-1)}(p_r) \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ \alpha_{g1}(p_1) & \cdots & & & & & \alpha_{gr}^{(m_r-1)}(p_r) \end{pmatrix},$$

dove $\alpha_{ij}^{(h)}$ indica la h -esima derivata di α_{ij} rispetto a w_j .

DIMOSTRAZIONE. Per dualità

$$h^1(C, \mathcal{O}(\sum m_i p_i)) = h^0(C, K_C(-\sum m_i p_i)).$$

Segue dalla successione esatta

$$0 \rightarrow H^0(C, K_C(-\sum m_i p_i)) \rightarrow H^0(C, K_C) \xrightarrow{\sigma} H^0(C, \sum \mathbb{C}^{m_i}_{p_i}) \rightarrow \cdots$$

che

$$h^0(C, K_C(-\sum m_i p_i)) = g - \dim(\sigma H^0(C, K_C)) = g - \text{rango} \begin{pmatrix} \alpha_{11}(p_1) & \cdots \\ \vdots & \\ \vdots & \end{pmatrix}.$$

Ciò conclude la dimostrazione. \square

OSSERVAZIONE 11.2. La mappa $\psi_q^{(r)}$ è data da

$$\psi_q^{(r)}(p_1 + \cdots + p_r) = \text{classe di} \left(\int_q^{p_1} \omega_1 + \cdots + \int_q^{p_r} \omega_1, \dots, \int_q^{p_1} \omega_g + \cdots + \int_q^{p_r} \omega_g \right).$$

Se p_1, \dots, p_r sono distinti e w_i è una coordinata su un intorno di p_i , allora (w_1, \dots, w_r) sono coordinate locali su un intorno di $p_1 + \cdots + p_r$. È chiaro che, rispetto a queste coordinate, la matrice Jacobiana di $\psi_q^{(r)}$ è $(\alpha_{ij}(p_j))$. In questo caso, dunque, il lemma 11.1 lega l'indice di specialità $h^1(C, \mathcal{O}(D))$ di un divisore effettivo D al rango della Jacobiana di ψ in D . Ciò è vero in generale; più esattamente si può mostrare che il rango della matrice che compare nell'enunciato del lemma 11.1 è sempre uguale al rango della matrice Jacobiana di ψ in $m_1 p_1 + \cdots + m_r p_r$. Lasciamo al lettore la verifica.

Per $r \leq g$, la mappa $\psi^{(r)}$ è genericamente 1-1 sulla sua immagine. In effetti i teoremi di Abel e Riemann-Roch implicano che $\psi^{(g)}(C^{(g)}) = X$, quindi $\psi^{(r)}(C^{(r)})$ ha dimensione r , e dunque la fibra generica di $\psi^{(r)}$ è finita; d'altra parte il teorema di Abel dice che due divisori effettivi D e D' dello stesso grado sono linearmente equivalenti se e solo se $\psi(D) = \psi(D')$, quindi le fibre di $\psi^{(r)}$ sono connesse. Un divisore effettivo D si dice *speciale* se $h^0(C, \mathcal{O}(D)) > 1$. Dunque quanto si è appena mostrato dice anche che un generico divisore effettivo di grado $r \leq g$ non è speciale.

Veniamo al tema centrale di questo capitolo. Per prima cosa vogliamo mostrare che Θ è un traslato di $\psi^{(g-1)}(C^{(g-1)})$. Sia $e = \psi(p_1 + \cdots + p_g)$ un punto di X , e indichiamo con τ_e la traslazione $x \mapsto x + e$ in X . Supponiamo che $\psi(C)$ non sia contenuta in $\tau_e(\Theta)$; allora $\tau_e(\Theta)$ taglia su C un divisore D_e . Viene da chiedersi se D_e sia linearmente equivalente a $p_1 + \cdots + p_g$. Ciò non è esattamente vero, ma vale il seguente risultato.

LEMMA 11.3. *Se $\psi(C)$ non è contenuta in $\tau_e(\Theta)$, allora $\deg(D_e) = g$, e la classe di equivalenza lineare di $D_e - (p_1 + \cdots + p_g)$ è indipendente da e (ma dipende dal punto base q). In altri termini,*

$$e = \psi(D_e) + \kappa_q,$$

dove κ_q non dipende da e .

Se non c'è rischio di confusione scriveremo κ invece di κ_q . Supponiamo, per il momento, che il lemma 11.3 sia stato dimostrato. Scegliamo punti distinti p_1, \dots, p_g tali che $h^0(C, \mathcal{O}(D)) = 1$, dove $D = p_1 + \cdots + p_g$. Poniamo $e = \psi(D) + \kappa$. Se $\psi(C) \subset \tau_e(\Theta)$, allora

$$\begin{aligned} \Theta \ni \psi(p_g) - e &= \psi(D) - e - \psi(p_1 + \cdots + p_{g-1}) \\ &= -\kappa - \psi(p_1 + \cdots + p_{g-1}), \end{aligned}$$

e $\psi(p_1 + \cdots + p_{g-1}) + \kappa \in \Theta$, dato che $\Theta = -\Theta$.

Se invece $\tau_e(\Theta)$ non contiene $\psi(C)$, taglia su C un divisore D_e che, per la scelta di D e per il lemma 11.3, è linearmente equivalente a D . Ne segue anche in questo caso che

$$\psi(p_1 + \cdots + p_{g-1}) + \kappa \in \Theta.$$

In conclusione, per una scelta generica di $p_1 + \cdots + p_{g-1}$, $\psi(p_1 + \cdots + p_{g-1})$ appartiene a $\tau_{-\kappa}(\Theta)$, e quindi

$$\psi(C^{(g-1)}) \subset \tau_{-\kappa}(\Theta).$$

Per dimostrare che vale anche l'inclusione opposta studiamo innanzitutto le intersezioni tra i traslati di $\psi(C)$ e $\psi(C^{(g-1)})$. La prima osservazione è che, per x generico, $\tau_x(\psi(C))$ non incontra il luogo singolare di $\psi(C^{(g-1)})$, e le intersezioni tra $\tau_x(\psi(C))$ e $\psi(C^{(g-1)})$ sono tutte trasverse. Consideriamo infatti la mappa $\sigma : \psi(C^{(g-1)}) \times \psi(C) \rightarrow X$ data da $\sigma(y, p) = y - p$, e sia $Z \subset \psi(C^{(g-1)}) \times \psi(C)$ il luogo delle coppie (y, p) tali che lo spazio tangente a $\psi(C)$ in p è parallelo allo spazio tangente a $\psi(C^{(g-1)})$ in y . Questo luogo è un sottospazio analitico di $\psi(C^{(g-1)}) \times \psi(C)$ di dimensione al più $g-1$. Infatti il luogo singolare di $\psi(C^{(g-1)})$ ha dimensione al più $g-2$, e quindi l'insieme dei punti (y, p) tali che y appartiene a questo luogo ha dimensione al più $g-1$. D'altra parte, se y è un punto liscio di $\psi(C^{(g-1)})$, vi sono solo un numero finito di punti di $p \in \psi(C)$ tali che $T_p(\psi(C))$ sia parallelo a $T_y(\psi(C^{(g-1)}))$, dato che $X = \psi(C^{(g)})$ e quindi $\psi(C)$ genera X . Ciò mostra che Z ha dimensione inferiore a g , e quindi in particolare che $\sigma(Z) \neq X$. Sia x un punto di X che non appartiene a $\sigma(Z)$. Se $y \in \tau_x(\psi(C)) \cap \psi(C^{(g-1)})$ c'è un punto p di $\psi(C)$ tale che $y = x + p$, cioè tale che $x = \sigma(y, p)$. Ne segue che y non è un punto singolare di $\psi(C^{(g-1)})$ e che l'intersezione di $\tau_x(\psi(C))$ e $\psi(C^{(g-1)})$ in y è trasversa.

È utile capire come l'involutione $x \mapsto -x$ di $J(C)$, che indicheremo anche con ι , agisce su $\psi(C^{(g-1)})$. Sia D un divisore effettivo di grado $g-1$. I teoremi di Riemann-Roch e di dualità implicano che

$$1 \leq h^0(C, \mathcal{O}(D)) = h^1(C, \mathcal{O}(D)) = h^0(C, K_C(-D)),$$

quindi c'è un divisore effettivo D' di grado $g-1$ tale che $D + D'$ sia un divisore canonico, cioè il divisore di un differenziale abeliano. La classe di equivalenza lineare

di D' dipende solo dalla classe di equivalenza lineare di D . Diremo che il divisore D' è *residuo* di D ; diremo anche che il sistema lineare $|D'|$ è residuo di $|D|$. L'identità

$$-\psi(D) = -\psi(D + D') + \psi(D') = \psi(D') - \psi(K_C)$$

dice che l'involuzione ι corrisponde, su $\psi(C^{(g-1)})$, a passare alla serie lineare residua e a traslare di $-\psi(K_C)$. In particolare ι trasforma $\psi(C^{(g-1)})$ in un suo traslato; più esattamente

$$-\psi(C^{(g-1)}) = \tau_{-\psi(K_C)}(\psi(C^{(g-1)})).$$

Ne segue in particolare che studiare le intersezioni di traslati di $\psi(C^{(g-1)})$ e $\psi(C)$ equivale a studiare quelle di traslati di $\psi(C^{(g-1)})$ e $\iota\psi(C)$. Mostriamo ora che il numero di intersezione di due qualsiasi traslati di $\psi(C^{(g-1)})$ e $\psi(C)$ è uguale a g . Per farlo basterà dimostrare che $\psi(C^{(g-1)})$ e un generico traslato di $\psi(C)$ hanno in comune esattamente g punti, poiché essi sono trasversi, come si è visto sopra. Come si è appena notato, questo equivale a mostrare che $\psi(C^{(g-1)})$ e un generico traslato di $\iota(\psi(C))$ hanno in comune esattamente g punti, il che segue dal seguente risultato.

LEMMA 11.4. *Sia D un divisore effettivo non speciale di grado g su C . Scriviamo $D = \sum m_i p_i$, dove i p_i sono punti distinti e gli m_i interi positivi. I punti di intersezione tra $\psi(C^{(g-1)})$ e $\tau_{\psi(D)}(\iota\psi(C))$ sono tutti e soli quelli della forma $\psi(D) - \psi(p_i)$. Inoltre la molteplicità di intersezione tra $\psi(C^{(g-1)})$ e $\tau_{\psi(D)}(\iota\psi(C))$ nel punto $\psi(D) - \psi(p_i)$ vale m_i .*

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare la prima asserzione dobbiamo trovare le g -uple di punti p, p_1, \dots, p_{g-1} di C tali che $D - p$ sia linearmente equivalente a $p_1 + \dots + p_{g-1}$. Poiché D non è speciale, questo accade se e solo se p è uno tra i punti di D , e p_1, \dots, p_{g-1} sono i rimanenti. Quanto alle molteplicità di intersezione, osserviamo che i divisori non speciali di grado g che constano di g punti distinti costituiscono un aperto denso in $C^{(g)}$. Dunque, se D è un elemento generale di questo aperto, l'intersezione tra $\psi(C^{(g-1)})$ e $\tau_{\psi(D)}(\iota\psi(C))$ è trasversa. Ne segue in particolare che la molteplicità di intersezione di $\psi(C^{(g-1)})$ e $\tau_x(\iota\psi(C))$ vale g per ogni x . Questo dimostra la seconda asserzione del lemma nel caso in cui D consta di g punti distinti. Nel caso generale si può procedere per degenerazione. Possiamo trovare divisori D' arbitrariamente vicini a D che siano non speciali e costituiti da g punti distinti. Se D' è sufficientemente vicino a D , $\tau_{\psi(D')}(\iota\psi(C))$ incontra $\psi(C^{(g-1)})$ vicino a $\psi(D) - \psi(p_i)$ esattamente in m_i punti, con intersezioni trasverse. Ne segue la tesi. \square

Sappiamo che $\tau_{-\kappa}(\Theta)$ contiene $\psi(C^{(g-1)})$, e quindi è della forma $m\psi(C^{(g-1)}) + Y$, con $m > 0$. Intersecando con $\psi(C)$, in virtù del lemma 11.3 si conclude che $m = 1$ e che il numero di intersezione di $\psi(C)$ e Y è 0. Resta da mostrare che il divisore Y è nullo. Supponiamo che ciò non sia vero. Scegliamo un punto liscio y di Y , o piuttosto dello spazio analitico ridotto ad esso soggiacente. La retta tangente a $\psi(C)$ in qualsiasi suo punto è parallela allo spazio tangente a Y in y , poiché in caso contrario potremmo far sì che $\psi(C)$ e un traslato di Y si intersechino trasversalmente, il che contraddirebbe $Y \cdot \psi(C) = 0$. Ciò è impossibile, dato che $\psi(C)$ genera X . Abbiamo quindi dimostrato il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 11.5. $\Theta = \tau_{\kappa}(\psi(C^{(g-1)}))$.

Sia D un divisore effettivo di grado $g - 1$, e poniamo $e = \psi(D) + \kappa$. Dato che $-\Theta = \Theta$, si ha che $-e = \psi(D') + \kappa$ per qualche divisore effettivo D' di grado $g - 1$. Sommando queste uguaglianze si ottiene

$$\psi(D + D') = -2\kappa,$$

il che dice in particolare che la classe di equivalenza lineare di $D + D'$ non dipende da D . D'altra parte $D + D'$ contiene $g - 1$ punti arbitrari, e quindi $h^0(C, \mathcal{O}(D + D')) = g$, cioè $\mathcal{O}(D + D') = K_C$ e

$$\psi_q(K_C) = -2\kappa_q.$$

Ora ci proponiamo di studiare le relazioni che intercorrono tra le singularità di Θ e i divisori speciali su C . Il primo risultato è il seguente.

PROPOSIZIONE 11.6. *Sia D un divisore effettivo speciale di grado $g - 1$. Allora $\psi(D) + \kappa$ è un punto singolare di Θ . Più esattamente, la molteplicità di $\psi(D) + \kappa$ in Θ è pari almeno a $h^0(C, \mathcal{O}(D))$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $r + 1$ un intero minore o uguale a $h^0(C, \mathcal{O}(D))$. Dimostreremo, per induzione su r , che la molteplicità di $\psi(D) + \kappa$ è almeno pari a $r + 1$. Il caso $r = 0$ è chiaro. La funzione $(p_1, \dots, p_{g-1}) \mapsto \vartheta(\psi(\sum p_i) + \kappa)$ è identicamente nulla. Differenziando rispetto a p_1, \dots, p_{g-1} si ricava l'identità

$$\sum_{i_1, \dots, i_r} \frac{\partial^r \vartheta}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_r}} (\psi(\sum p_i) + \kappa) \omega_{i_1}(p_1) \cdots \omega_{i_r}(p_r) + Q(p_1, \dots, p_{g-1}) = 0,$$

dove le derivate di ϑ che compaiono in Q hanno tutte ordine minore di r . Per ipotesi induttiva, dunque,

$$\sum_{i_1, \dots, i_r} \frac{\partial^r \vartheta}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_r}} (\psi(D) + \kappa) \omega_{i_1}(p_1) \cdots \omega_{i_r}(p_r) = 0$$

se $\sum p_i$ è linearmente equivalente a D . L'ipotesi che $h^0(C, \mathcal{O}(D)) \geq r + 1$ implica che si possono scegliere p_1, \dots, p_r in modo arbitrario senza cambiare $\psi(D)$, e quindi

$$\frac{\partial^r \vartheta}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_r}} (\psi(D) + \kappa) = 0$$

per ogni scelta di i_1, \dots, i_r . Questo conclude la dimostrazione. \square

Il prossimo risultato è un parziale reciproco della proposizione 11.6.

LEMMA 11.7. *Il luogo singolare di Θ consiste di tutti e soli i punti della forma $\psi(D) + \kappa$, dove D è un divisore effettivo speciale di grado $g - 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo mostrare che, se $D = \sum p_i$ non è speciale, $\psi(D) + \kappa$ non è un punto singolare di Θ . Poiché la validità o meno del risultato non dipende dalla scelta del punto base, possiamo supporre che $q \neq p_i$, $i = 1, \dots, g - 1$, e che $D + q$ non sia speciale. Per il lemma 11.4, la curva $\tau_{\psi(D) + \kappa}(\iota\psi(C))$ non è contenuta in Θ , e l'interseca nel punto $\psi(D) + \kappa = \psi(D) - \psi(q) + \kappa$ con molteplicità 1, il che mostra che $\psi(D) + \kappa$ è un punto liscio di Θ . \square

OSSERVAZIONE 11.8. Un'altra dimostrazione del lemma 11.7 può essere ottenuta combinando il lemma 11.1 e l'osservazione 11.2. Questi due risultati dicono che, quando p_1, \dots, p_{g-1} sono punti distinti di C tali che $D = \sum p_i$ non sia speciale, la matrice Jacobiana di ψ in D ha rango $g - 1$, e dunque $\psi(D) + \kappa$ è un punto liscio di Θ (si osservi che, se $\psi(D') = \psi(D)$, allora $D' = D$ perchè D non è speciale). Con

un po' più di attenzione, questo metodo può essere applicato anche al caso in cui p_1, \dots, p_{g-1} non sono punti distinti.

Siamo ora in grado di dimostrare il reciproco della proposizione 11.6, che è il principale risultato di questo capitolo ed è essenzialmente dovuto a Riemann.

TEOREMA 11.9 (Teorema di singolarità di Riemann). *Sia C una superficie di Riemann compatta e connessa di genere $g \geq 2$. Se D è un divisore effettivo di grado $g-1$ su C , la molteplicità di $\psi(D) + \kappa$ in Θ è uguale a $h^0(C, \mathcal{O}(D))$.*

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $r+1 = h^0(C, \mathcal{O}(D))$. Ciò che dobbiamo mostrare è che la molteplicità di $\psi(D) + \kappa$ non supera $r+1$. Ragioneremo per induzione su r . Il caso $r=0$ è il lemma 11.7. Per ogni scelta di $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_r$ possiamo scrivere

$$\psi(D) = \psi(q_1 + \dots + q_{g-r-1} + \bar{p}_1 + \dots + \bar{p}_r),$$

dove q_1, \dots, q_{g-r-1} dipendono da $\bar{p} = \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_r$. Per \bar{p} generico, $h^0(C, \mathcal{O}(\sum q_i)) = 1$. Fissato \bar{p} , poniamo

$$\mu(p_1, \dots, p_r, v) = \psi(\sum p_i + \sum q_j) - \psi(v) + \kappa,$$

per ogni scelta di $p_1, \dots, p_r, v \in C$. Osserviamo che

$$\mu(\bar{p}, v) = \psi(D) - \psi(v) + \kappa \in \Theta,$$

e inoltre che, se $D+q$ è linearmente equivalente a $D'+v$, e q (il punto base) e v sono generici,

$$(11.1) \quad \begin{aligned} h^0(C, \mathcal{O}(D+q)) &= r+1, \\ h^0(C, \mathcal{O}(D')) &= r. \end{aligned}$$

Ciò significa, per ipotesi induttiva, che per v generico c'è una derivata di ordine r di ϑ che non si annulla in $\mu(\bar{p}, v) = \psi(D') + \kappa$. In generale, $h^0(C, \mathcal{O}(D')) \geq r$. Osserviamo che $\vartheta(\mu(p_1, \dots, p_r, v))$, come funzione di p_1, \dots, p_r , si annulla in \bar{p} con ordine al più $r-1$, per \bar{p} e v generici. Se ciò non fosse vero, infatti, si avrebbe che

$$0 = \sum \frac{\partial^r \vartheta}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_r}} (\psi(D') + \kappa) \omega_{i_1}(\bar{p}_1) \dots \omega_{i_r}(\bar{p}_r)$$

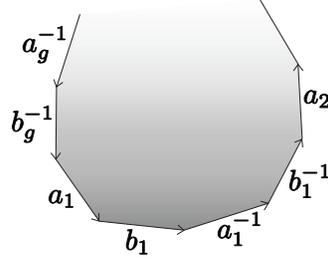
per \bar{p} e r generici, cosicché ϑ si annullerebbe con ordine almeno r in $\psi(D') + \kappa$, contro la 11.1 e l'ipotesi induttiva. Possiamo dunque trovare una curva liscia $(p_1(t), \dots, p_r(t))$ tale che

$$\begin{aligned} p_i(0) &= \bar{p}_i, \quad i = 1, \dots, r, \\ \sum q_i + \sum p_i(t) + q &\text{ non è speciale per } q \text{ generico e } t \neq 0, \\ \frac{\partial^r}{\partial t^r} \vartheta(\mu(p_1(t), \dots, p_r(t), v))|_{t=0} &\neq 0. \end{aligned}$$

Ciò implica che, per ogni t fissato, $t^{-r} \vartheta(\mu(p_1(t), \dots, p_r(t), v))$ non è identicamente nulla, e in effetti si annulla esattamente nei punti $q, q_1, \dots, q_{g-r-1}, p_1(t), \dots, p_r(t)$. In particolare, per q generico,

$$\frac{\partial^r}{\partial t^r} \vartheta(\mu(p_1(t), \dots, p_r(t), v))|_{t=0}$$

ha uno zero semplice in q , che corrisponde a $\mu(\bar{p}, q) = \psi(D) + \kappa$. Quindi ϑ non può annullarsi in $\psi(D) + \kappa$ con ordine maggiore di r . Questo conclude la dimostrazione del teorema 11.9. \square

FIGURA 1. Un poligono con $4g$ lati.

L'ultimo pezzo mancante è la dimostrazione del lemma 11.3. Cominciamo con lo stabilire alcune notazioni. Consideriamo un poligono S con $4g$ lati come in figura 1. Se identifichiamo a_i con a_i^{-1} e b_i con b_i^{-1} con orientazioni opposte, cioè identificando il punto iniziale di a_i con quello finale di a_i^{-1} e viceversa, e analogamente per b_i e b_i^{-1} , il risultato è una superficie compatta orientabile di genere g . Inoltre gli 1-cicli corrispondenti a $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ generano il primo gruppo di omologia di questa superficie e rispetto a una opportuna orientazione i numeri di intersezione degli a_i e dei b_i sono

$$\begin{aligned} I(a_i, a_j) &= I(b_i, b_j) = 0, \\ I(a_i, b_j) &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Possiamo porre su S una struttura complessa tale che C sia ottenibile da S mediante le identificazioni sopra specificate. Scegliamo una base $\omega_1, \dots, \omega_g$ dello spazio dei differenziali abeliani su C con la proprietà che

$$\int_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}.$$

Indichiamo con u_i l' i -esimo vettore della base standard di \mathbb{C}^g . Poniamo anche

$$t_{ij} = \int_{b_j} \omega_i, \quad \tilde{u}_j = \sum t_{ij} u_i.$$

La varietà Jacobiana di C è il quoziente di \mathbb{C}^g modulo il reticolo Λ generato dagli u_i e dagli \tilde{u}_i . Rispetto alla polarizzazione standard di $J(C)$ si ha che

$$\begin{aligned} E(u_i, u_j) &= E(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j) = 0, \\ E(\tilde{u}_i, u_j) &= \delta_{ij}, \end{aligned}$$

e quindi le notazioni che abbiamo appena introdotto sono coerenti con quelle introdotte all'inizio del capitolo.

La funzione theta di C soddisfa le equazioni funzionali

$$\begin{aligned} \vartheta(z + u_i) &= \vartheta(z), \\ \vartheta(z + \tilde{u}_i) &= e^{-2\pi\sqrt{-1}z_i - \pi\sqrt{-1}t_{ii}} \vartheta(z). \end{aligned}$$

Se poniamo $\varphi(z) = \vartheta(z - e)$, la funzione φ soddisfa l'equazione funzionale

$$\begin{aligned} \varphi(z + u_i) &= \varphi(z), \\ \varphi(z + \tilde{u}_i) &= e^{2\pi\sqrt{-1}e_i} e^{-2\pi\sqrt{-1}z_i - \pi\sqrt{-1}t_{ii}} \varphi(z). \end{aligned}$$

Sia f una funzione, anche a più valori, su C . Scegliamo una determinazione di f su S (nelle applicazioni non sarà importante quale si sceglie) e indichiamo con f^+ il valore di f sui lati a_k e b_k , e con f^- il valore di f sui lati a_k^{-1} e b_k^{-1} , per $k = 1, \dots, g$. Se consideriamo ψ come funzione a più valori da C a \mathbb{C}^g , un esempio tipico è dato dalla i -esima componente di ψ , che indichiamo con ψ_i . Su a_k si ha che

$$\psi_i^- = \psi_i^+ + t_{ik},$$

mentre su b_k si ha che

$$\psi_i^+ = \psi_i^- + \delta_{ik}.$$

Un altro esempio è fornito da $\varphi \circ \psi$, che d'ora in poi indicheremo semplicemente con φ . Le equazioni funzionali soddisfatte da φ si traducono in

$$\begin{aligned} \varphi^+ &= \varphi^- \quad \text{su } b_k, \\ \varphi^- &= e^{2\pi\sqrt{-1}e_k} e^{-2\pi\sqrt{-1}\psi_k^+ - \pi\sqrt{-1}t_{kk}} \varphi^+ \quad \text{su } a_k. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} d \log \varphi^+ &= d \log \varphi^- \quad \text{su } b_k, \\ d \log \varphi^- &= d \log \varphi^+ - 2\pi\sqrt{-1}\omega_k \quad \text{su } a_k. \end{aligned}$$

Supponiamo che $\varphi(z) = \vartheta(z - e)$ non si annulli identicamente su $\psi(C)$. Vogliamo mostrare che φ ha esattamente g zeri. Possiamo supporre che tutti gli zeri di φ siano all'interno di S , nel qual caso il numero degli zeri di φ è

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_k \int_{a_k} + \int_{b_k} (d \log \varphi^+ - d \log \varphi^-) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_k \int_{a_k} 2\pi\sqrt{-1}\omega_k = g.$$

Questo dimostra la prima parte del lemma 11.3. Per dimostrare la seconda parte, siano p_1, \dots, p_g gli zeri di φ in S . Dobbiamo calcolare $\sum \psi(p_i)$. Lo faremo componente per componente. Usando il teorema dei residui si ottiene:

$$\begin{aligned} 2\pi\sqrt{-1} \sum_i \psi_h(p_i) &= \sum_k \int_{a_k} + \int_{b_k} (\psi_h^+ d \log \varphi^+ - \psi_h^- d \log \varphi^-), \\ \int_{b_k} (\psi_h^+ d \log \varphi^+ - \psi_h^- d \log \varphi^-) &= \delta_{hk} \int_{b_k} d \log \varphi^+, \\ \int_{a_k} (\psi_h^+ d \log \varphi^+ - \psi_h^- d \log \varphi^-) &= 2\pi\sqrt{-1} \int_{a_k} \psi_h^+ \omega_k \\ &\quad + 2\pi\sqrt{-1}t_{hk} - t_{hk} \int_{a_k} d \log \varphi^+. \end{aligned}$$

Indichiamo con $\mathcal{I}_k, \mathcal{E}_k, \mathcal{I}'_k, \mathcal{E}'_k$ i punti iniziali e finali di a_k e b_k . Le equazioni funzionali soddisfatte da φ implicano che

$$\begin{aligned} \int_{a_k} d \log \varphi^+ &= \log \varphi^+(\mathcal{E}_k) - \log \varphi^+(\mathcal{I}_k) = 2\pi\sqrt{-1}\nu_k, \\ \int_{b_k} d \log \varphi^+ &= \log \varphi^+(\mathcal{E}'_k) - \log \varphi^+(\mathcal{I}'_k) \\ &= 2\pi\sqrt{-1}e_k - 2\pi\sqrt{-1}\psi_k(\mathcal{I}'_k) - \pi\sqrt{-1}t_{kk} + 2\pi\sqrt{-1}\mu_k, \end{aligned}$$

dove ν_k e μ_k sono interi. In conclusione si ottiene

$$\sum_i \psi(p_i) \equiv e - \kappa \pmod{\Lambda}.$$

dove la h -esima componente di κ è

$$\kappa_h = \sum_k \int_{a_k} \psi_h^+ \omega_k - \psi_h(\mathcal{I}'_h) - \frac{1}{2} t_{hh}.$$

È chiaro che κ non dipende da e . Ciò conclude la dimostrazione del lemma 11.3, e dunque del teorema 11.9.

Bibliografia

1. E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris, *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 267, Springer-Verlag, New York, 1985.
2. H. M. Farkas and I. Kra, *Riemann surfaces*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 71, Springer-Verlag, New York, 1992.
3. Phillip Griffiths and Joseph Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978, Pure and Applied Mathematics.
4. R. C. Gunning, *Lectures on Riemann surfaces*, Princeton Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1966.
5. Robert C. Gunning and Hugo Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.
6. Joseph Lewittes, *Riemann surfaces and the theta function*, Acta Math. **111** (1964), 37–61.
7. David Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5, Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Oxford University Press, London, 1970.
8. C. L. Siegel, *Topics in complex function theory. Vol. I*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1988, Elliptic functions and uniformization theory, Translated from the German by A. Shenitzer and D. Solitar, With a preface by Wilhelm Magnus, Reprint of the 1969 edition, A Wiley-Interscience Publication.
9. ———, *Topics in complex function theory. Vol. II*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1988, Automorphic functions and abelian integrals, Translated from the German by A. Shenitzer and M. Tretkoff, With a preface by Wilhelm Magnus, Reprint of the 1971 edition, A Wiley-Interscience Publication.
10. ———, *Topics in complex function theory. Vol. III*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1989, Abelian functions and modular functions of several variables, Translated from the German by E. Gottschling and M. Tretkoff, With a preface by Wilhelm Magnus, Reprint of the 1973 original, A Wiley-Interscience Publication.
11. George Springer, *Introduction to Riemann surfaces*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1957.
12. André Weil, *Introduction à l'étude des variétés kählériennes*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, VI. Actualités Sci. Ind. no. 1267, Hermann, Paris, 1958.
13. Hermann Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1974, Fünfte Auflage.

Indice analitico

- aperto coordinato, 1
- applicazione olomorfa, 1
- atlante olomorfo, 1

- banalizzazione locale
 - di un fibrato vettoriale, 4

- carta locale, 1
- Cauchy-Riemann, equazioni di, 2
- coordinate di fibra
 - di un fibrato vettoriale, 5
- coordinate locali, 1

- differenziale
 - abeliano, 9
 - meromorfo, 9
 - olomorfo, 9
- dimensione
 - complessa, di una varietà complessa, 1
 - reale, di una varietà complessa, 1
- duale
 - di un fibrato vettoriale, 6

- fascio
 - delle sezioni di un fibrato olomorfo, 6
 - strutturale, di una varietà complessa, 6
- fibrato
 - canonico, 6
 - cotangente olomorfo, 6
 - in rette, 4
 - tangente olomorfo, 6
 - vettoriale banale, 4
 - vettoriale olomorfo, 4
- forma differenziale
 - olomorfa, 3
- funzioni di transizione
 - di un fibrato vettoriale, 5
 - equivalenti, 5

- isomorfismo
 - di fibrati vettoriali, 4

- morfismo
 - di varietà complesse, 1

- orientazione canonica su una varietà complessa, 4

- principio del massimo
 - per funzioni olomorfe, 1
- prodotto tensoriale
 - di fibrati vettoriali, 6

- rango
 - di un fibrato vettoriale, 4

- sezione
 - di un fibrato vettoriale, 5
- sfera di Riemann, 9
- spazio tangente
 - a una varietà complessa, 3
- struttura complessa, 1
- struttura differenziabile
 - soggiacente a una struttura complessa, 1
- superficie di Riemann, 1
 - ellittica, 9

- tipo
 - di un vettore tangente, 3
 - di una forma differenziale, 2

- varietà complessa, 1