Corso di Algebra Lineare - a.a. 2010-2011

Prova scritta del 22.2.2011

Compito B

1. Dati i vettori in $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ t \\ 2+t \end{pmatrix},$$

dove t è un parametro reale, sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da v_1 e v_2, e W quello generato da v_3 e v_4. Per ogni valore di t si calcolino le dimensioni di U, W, $U+W$ e $U \cap W$.

2. Sia Π il piano in $\mathbb{R}^3$ di equazione

$$x - y + z = 0$$

e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \Pi$ la proiezione ortogonale (rispetto al prodotto scalare euclideo).

   (a) Posto

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   si mostri che $\{v_1, v_2\}$ è una base di Π.

   (b) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e a $\{v_1, v_2\}$.

3. Si considerino le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k & 1 \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

   (a) Determinare i valori di k per cui B è diagonalizzabile e, per tali valori, dare una base di autovettori.

   (b) Determinare per quali valori di k le matrici A e B sono simili.

4. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$, e sia $F : V \to V$ l'applicazione (lineare) definita da

$$F(A) = A + {}^tA$$

   (a) Trovare il rango di F.

   (b) Trovare gli autovalori di F e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome, cognome e numero di matricola.

Soluzioni

1. I vettori v_1 e v_2 sono sempre indipendenti, quindi $\dim(U) = 2$ per ogni t. Invece v_3 e v_4 sono proporzionali solo per $t = -1$. Quindi $\dim(W)$ vale 2 se $t \neq -1$ e vale 1 se $t = -1$. Per eliminazione Gaussiana si mostra che il rango della matrice le cui colonne sono v_1, v_2, v_3, v_4 è 4, a meno che $t = \pm 1$, nel qual caso vale 3. Ne segue che $\dim(U + W) = 4$ per $t \neq \pm 1$, mentre $\dim(U + W) = 3$ per $t = \pm 1$. La dimensione di $U \cap W$ si può calcolare tramite la formula di Grassmann $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W)$, e vale quindi $0 = 2 + 2 - 4$ se $t \neq \pm 1$, $0 = 2 + 1 - 3$ se $t = -1$, e $1 = 2 + 2 - 3$ se $t = 1$.

2. (a) I vettori v_1 e v_2 sono indipendenti e soddisfano l'equazione di Π.

   (b) Sia e_1, e_2, e_3 la base standard di $\mathbb{R}^3$. Il vettore $\nu = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è ortogonale a Π. Dunque $f(e_i)$ è della forma $e_i + k\nu$ e appartiene a Π. Ne segue che

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}v_1 + \tfrac{1}{3}v_2,$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{3}v_1 + \tfrac{2}{3}v_2,$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = -\tfrac{2}{3}v_1 + \tfrac{1}{3}v_2,$$

   e quindi che la matrice di f è

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

3. La matrici A e B sono triangolari e quindi i loro autovalori sono i termini diagonali. Ne segue che gli autovalori di A e B sono 3, con molteplicità 1, e 1, con molteplicità 2. La matrice B è diagonalizzabile se e solo se la dimensione dell'autospazio di 1 è 2. L'equazione degli autovettori

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   equivale a

$$\begin{aligned} 3x &= x \\ kx + y &= y \\ 5x + ky + z &= z \end{aligned}$$

   che dà $x = 0$, e anche $y = 0$ a meno che $k = 0$. Ciò mostra che l'autospazio di 1 ha dimensione 1 tranne che per $k = 0$, quando ha dimensione 2. Dunque B è diagonalizzabile solo per $k = 0$.

In questo caso una base di autovettori è ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5/2 \end{pmatrix} \text{ (per l'autovalore 3)}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (per l'autovalore 1)}.$$

La matrice A è sempre diagonalizzabile, e quindi simile alla matrice

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi è simile a B se e solo se questa è simile a Δ, cioè diagonalizzabile. Questo accade se e solo se $k = 0$.

4. Se A è antisimmetrica, $F(A) = 0$. Se A è simmetrica, $F(A) = 2A$. Lo spazio $\mathcal{A}$ delle matrici antisimmetriche è quindi contenuto nell'autospazio V_0 e quello $\mathcal{S}$ delle matrici simmetriche nell'autospazio V_2. Inoltre $\mathcal{A}$ ha dimensione $(n^2 - n)/2$ e $\mathcal{S}$ ha dimensione $(n^2 + n)/2$. Ma $\dim(V_0) + \dim(V_2) \leq \dim(V) = n^2$, mentre $\dim(\mathcal{A}) + \dim(\mathcal{S}) = n^2$. L'unica possibilità è dunque che $\mathcal{A} = V_0$ e $\mathcal{S} = V_2$. La conclusione è che gli autovalori di F sono 0 e 2, con molteplicità (algebrica e geometrica) uguale rispettivamente a $(n^2 - n)/2$ e $(n^2 + n)/2$.