

Soluzioni

1. (a) $f(1) = 0$, $f(x) = 0$, $f(x^2) = 2 \cdot 1$, $f(x^3) = 6 \cdot x$, $f(x^4) = 12 \cdot x^2$, $f(x^5) = 20 \cdot x^3$, $f(x^6) = 30 \cdot x^4$. Quindi:

i. la matrice è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii. la matrice è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

iii. la matrice è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $f(V)$ è lo spazio dei polinomi di grado ≤ 4 .

2. La matrice del sistema omogeneo associato ha determinante nullo per $t = 0$ e $t = 1$, e determinante non nullo per tutti gli altri valori di t . Quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette una e una sola soluzione per $t \neq 0, 1$. Quando $t = 1$ le ultime due equazioni del sistema si riducono a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

che sono incompatibili; in questo caso, quindi, il sistema non ha soluzioni. Per $t = 0$ la matrice del sistema omogeneo associato e quella orlata con la colonna dei termini noti diventano

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

che hanno entrambe rango 2. Quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette soluzioni e queste formano uno spazio (affine) di dimensione 1.

3. (a) Il polinomio caratteristico è $P(X) = \det(XI - A) = X^3 - 2X^2 + X = X(X - 1)^2$. Quindi gli autovalori sono 1 con molteplicità 2 e 0 con molteplicità 1. L'autospazio dell'autovalore 1 e quello dell'autovalore 0 sono generati, rispettivamente, da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (b) La matrice A non è diagonalizzabile perchè l'autovalore 1 ha molteplicità 2 ma il suo autospazio ha dimensione 1.
- (c) Il polinomio minimo divide il polinomio caratteristico di A e ogni autovalore di A è sua radice. Quindi il polinomio minimo può solo essere $P(X) = X(X-1)^2$ o $Q(X) = X(X-1)$. Se il polinomio minimo fosse $Q(X)$, che ha radici semplici, A sarebbe diagonalizzabile, contro quanto abbiamo dimostrato. Quindi il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico $P(X)$.
4. (a) Equazioni parametriche:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Equazioni cartesiane:

$$\begin{aligned} x_1 - 1 &= x_2 + 1 = x_3 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

- (b) La proiezione è il punto della forma

$$Q = P + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che appartiene a Λ . Dunque deve essere $(1+t) + (1+t) + (1+t) = 0$, cioè $t = -1$. Quindi Q è l'origine.