

Corso di Algebra Lineare - a.a. 2010-2011

Prova scritta del 8.2.2011

Compito B

1. Si consideri il sistema di equazioni lineari nelle incognite reali x, y, z, w , dipendente dal parametro reale t :

$$\begin{cases} x + ty - z + (t + 2)w = 2 \\ tx + y + (t + 2)z - w = 2 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

- (a) trovare i valori di t per i quali il sistema non ha soluzioni;
(b) per ogni altro valore di t determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni.
2. In \mathbb{R}^4 con il prodotto scalare euclideo, sia V la retta con rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2 + t \\ x_3 = 1 + 2t \\ x_4 = 1 + t \end{cases}$$

Sia W un sottospazio affine ortogonale a V passante per il punto p di coordinate $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$.

- (a) quali sono le dimensioni possibili per W ?
(b) dare una rappresentazione parametrica di W , quando questo ha dimensione massima possibile.
3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3t & -4t - 1 \\ 2t + 1 & 3t + 2 \end{pmatrix}$$

dove t è un parametro reale.

- (a) dire per quali valori di t la matrice A è diagonalizzabile;
(b) quando A è diagonalizzabile trovarne autovalori e basi per gli autospazi;
(c) quando A non è diagonalizzabile trovare una matrice triangolare che sia simile ad A .
4. Sia A una matrice complessa quadrata tale che $A^5 = A$.
- (a) La matrice A è diagonalizzabile?
(b) Se A è una matrice reale, è diagonalizzabile sui reali?
(c) quali sono i possibili autovalori di A ?

%%%%%%%%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome, cognome e numero di matricola.

Soluzioni

1. Il sistema ha come matrice completa

$$\begin{pmatrix} 1 & t & -1 & t+2 & 2 \\ t & 1 & t+2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che tramite eliminazione gaussiana per righe si riduce prima a

$$\begin{pmatrix} 1 & t & -1 & t+2 & 2 \\ 0 & (1-t)^2 & 2t+2 & -t^2-2t-1 & 2-2t \\ 0 & 1-t & 3 & -t-2 & 0 \end{pmatrix}$$

e poi a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 & t+2 & 2 \\ 0 & 1-t & 3 & -t-2 & 0 \\ 0 & 0 & -t-1 & t+1 & 2-2t \end{pmatrix}$$

Dunque per $t \neq \pm 1$ la matrice del sistema omogeneo associato ha rango 3, e quindi il sistema ha soluzioni, che dipendono da $1 = 4 - 3$ parametri. Per $t = \pm 1$ la matrice del sistema omogeneo associato ha rango 2. Per $t = 1$ la matrice A si riduce a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2. In questo caso il sistema ha quindi soluzioni, che dipendono da $2 = 4 - 2$ parametri. Infine per $t = -1$ la matrice A diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3. In questo caso dunque il sistema non ha soluzioni.

2. (a) 0, 1, 2, 3.

(b) Il sottospazio in questione ha una rappresentazione parametrica della forma

$$(s_1, s_2, s_3) \mapsto p + s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3,$$

dove v_1, v_2, v_3 sono vettori indipendenti ortogonali a

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per un vettore

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

la relazione di ortogonalità $\langle v, w \rangle = 0$ è:

$$a + b + 2c + d = 0.$$

Tre soluzioni indipendenti di questa equazione lineare sono:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. (a) Il polinomio caratteristico di A è

$$X^2 - 2X + 1 - t^2 = (X - 1 - t)(X - 1 + t).$$

Quindi gli autovalori di A sono $1 + t$ e $1 - t$. Quando $t \neq 0$, sono distinti, e dunque A è diagonalizzabile. Quando $t = 0$, se A fosse diagonalizzabile ci sarebbe una matrice B tale che $B^{-1}AB = I$. Ma allora $A = BIB^{-1} = I$, il che è falso. Dunque, per $t = 0$, A non è diagonalizzabile.

- (b) Gli autospazi di $1 + t$ e $1 - t$ hanno dimensione uno. Quindi basta trovare un autovettore per ognuno dei due autovalori. Un autovettore per $1 + t$ è una soluzione non nulla del sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 + t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ad esempio

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un autovettore per $1 - t$ è una soluzione non nulla del sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 - t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ad esempio

$$\begin{pmatrix} -4t - 1 \\ 2t + 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Quando $t = 0$ ogni autovalore di A è proporzionale a $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia B una qualsiasi matrice 2×2 non singolare la cui prima colonna sia v , ad esempio

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora $B^{-1}AB$ è triangolare superiore, perchè ha come prima colonna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per la matrice B particolare scelta sopra si ha che

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. (a) Il polinomio minimo di A divide $P(X) = X^5 - X = X(X^4 - 1)$, che ha cinque radici distinte, cioè 0 e le quattro radici quarte dell'unità. Dunque il polinomio minimo di A non ha radici multiple, e quindi A è diagonalizzabile.
- (b) Non è detto. Se A ha autovalori non reali, non è diagonalizzabile su \mathbb{R} . Un esempio è fornito dalla matrice di una rotazione di $\pi/2$ intorno all'origine di \mathbb{R}^2 , cioè da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha che $A^2 = -I$, quindi $A^4 = I$ e $A^5 = A$.

- (c) I possibili autovalori di A sono le radici di $P(X)$, cioè 0 e le quattro radici quarte dell'unità.