Corso di Algebra Lineare - a.a. 2010-2011

Prova scritta del 4.7.2011

Ogni esercizio vale 11 punti.

1. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
dove t è un parametro reale, e l'applicazione
$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ v &\mapsto Av. \end{aligned}$$
   (a) Scrivere la matrice dell'applicazione lineare φ rispetto alle basi $\mathcal{V}$ (in partenza) e $\mathcal{W}$ (in arrivo) nei seguenti casi
      i. $\mathcal{V} = \{e_1, e_2, e_3\}$ (base standard di $\mathbb{R}^3$), $\mathcal{W} = \{e_1, e_2, e_3\}$;
      ii. $\mathcal{V} = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3\}$ dove $w_1 = e_1 - e_3$, $w_2 = e_2$, $w_3 = e_1 + e_3$.
   (b) Trovare i valori del parametro t per i quali φ è invertibile.
   (c) Per i valori di t che rendono φ invertibile scrivere la matrice dell'applicazione φ^{-1} rispetto alla base standard (in partenza e in arrivo).

2. Si consideri la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Determinare autovalori di B e relative molteplicità algebriche e geometriche.
   (b) Trovare una base per ciascun autospazio.
   (c) Dire se la matrice B è diagonalizzabile.
   (d) Trovare il polinomio minimo di B.

3. In $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare euclideo si consideri la retta ℓ passante per il punto $P := (0, 1, 2, 0)$ e il punto $Q := (1, 0, 0, 0)$. Sia W il sottospazio affine tridimensionale perpendicolare a ℓ e passante per $O := (0, 0, 0, 0)$ e U il piano definito dalle equazioni:
$$\begin{cases} kx_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$
dove k è un parametro reale. Determinare le equazioni cartesiane e parametriche di $W \cap U$ per ogni valore di k.

%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome, cognome e numero di matricola.

Soluzioni

1. (a) i.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   ii.
$$\begin{pmatrix} \frac{1-t}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1+t}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (b) $\det A = 1 - t$, quindi A è invertibile se e solo se $t \neq 1$.

   (c) La matrice è
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-t} & 0 & \frac{1}{t-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{t}{t-1} & 0 & \frac{1}{1-t} \end{pmatrix}$$

2. (a) La matrice è triangolare superiore, quindi gli autovalori sono i suoi elementi diagonali. Dunque il solo autovalore è 1, con molteplicità algebrica 4. La matrice $B - I$ ha rango 3, quindi la molteplicità geometrica di 1 è 1.

   (b) ${}^t(1, 0, 0, 0)$.

   (c) La matrice non è diagonalizzabile perchè le molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore 1 sono diverse.

   (d) Il polinomio minimo deve essere della forma $(X - 1)^k$, con $1 \leq k \leq 4$. Dato che $B - I$ ha rango $3 = 4 - 1$, $(B - I)^2$ non può avere rango minore di $2 = 3 - 1$. Se fosse $(B - I)^3 = 0$, il nucleo di $B - I$ conterrebbe l'immagine di $(B - I)^2$, e quindi $B - I$ non potrebbe avere rango 3. Quindi il polinomio minimo di B è $(X - 1)^4$.

3. Il sottospazio W ha equazione $x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$, quindi $W \cap U$ ha equazioni cartesiane
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ kx_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$
   Queste equazioni sono dipendenti fra loro se e solo se $k = 1$, quando una di loro è superflua. Per $k \neq 1$ le tre equazioni sono equivalenti a $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, e quindi $W \cap U$ è la retta con rappresentazione parametrica $x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = t$. Per $k = 1$, invece, le tre equazioni sono equivalenti a $x_1 = x_2, x_3 = 0$, e quindi $W \cap U$ è il piano con rappresentazione parametrica $x_1 = x_2 = s, x_3 = 0, x_4 = t$.