

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2004-2005**

*Prova scritta del 27.6.2005*

**Compito A**

1. Sia  $Oxyz$  un riferimento ortonormale in uno spazio euclideo reale di dimensione 3. Siano dati i quattro punti  $Q, A, B, C$  rispettivamente di coordinate  $(1, 1, 3), (2, 1, 0), (2, -1, 1)$  e  $(0, 0, 0)$ .
- (a) Determinare il raggio della sfera  $S$  di centro  $Q$  e passante per  $B$  e darne un'equazione cartesiana;
  - (b) dare equazioni parametriche e cartesiane per la retta contenente  $Q$  e  $B$  e scrivere un'equazione cartesiana per il piano  $\pi$  contenente  $A, B$  e  $C$ ;
  - (c) trovare la distanza di  $Q$  da  $\pi$  e le coordinate del punto  $P$  di  $\pi$  che ha distanza minima da  $Q$ ;
  - (d) trovare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando  $S$  e  $\pi$ .

**Punti (2+4+3+2)**

2. Sia  $A$  una matrice  $3 \times 3$  reale la cui prima riga è  $(1, 1, 1)$ . Supponiamo che i vettori  ${}^t(1, 0, -1)$  e  ${}^t(1, -1, 0)$  siano autovettori per  $A$ .
- (a) Qual'è il rango di  $A$ ?
  - (b) Mostrare che  $A$  è diagonalizzabile oppure nilpotente.
  - (c) Fare un esempio di una matrice di questa forma diagonalizzabile, e di una nilpotente.
  - (d) Supponiamo che un autospazio di  $A$  abbia equazioni:

$$y + x - 2z = y - x = 0.$$

Determinare i coefficienti di  $A$ .

**Punti (3+3+2+3)**

3. Sia  $A$  una matrice  $2 \times 2$  reale.
- (a) Mostrare che, se  $A^2 + I = 0$ , allora  $A$  è simile a

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Si supponga che  $A^3 + A = 0$ , e che  $A$  non sia simile a  $B$ . Determinare  $A$ .
- (c) Si supponga che  $A^4 + 2A^2 + I = 0$ . Dire se  $A$  è simile a  $B$  o no.

**Punti (3+3+2)**

%%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome e cognome dello studente. Sul primo foglio va indicato il corso di laurea (Matematica o Fisica), e se si tratta di laurea triennale o quadriennale.

Corso di Algebra lineare - a.a. 2004-2005

Prova scritta del 27.6.2005

Compito B

1. Sia  $Oxyz$  un riferimento ortonormale in uno spazio euclideo reale di dimensione 3. Siano dati i quattro punti  $Q, A, B, C$  rispettivamente di coordinate  $(2, 1, 3), (0, 0, 0), (1, -1, 1)$  e  $(2, 2, 0)$ .
- (a) Determinare il raggio della sfera  $S$  di centro  $Q$  e passante per  $B$  e darne un'equazione cartesiana;
  - (b) dare equazioni parametriche e cartesiane per la retta contenente  $Q$  e  $B$  e scrivere un'equazione cartesiana per il piano  $\pi$  contenente  $A, B$  e  $C$ ;
  - (c) trovare la distanza di  $Q$  da  $\pi$  e le coordinate del punto  $P$  di  $\pi$  che ha distanza minima da  $Q$ ;
  - (d) trovare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando  $S$  e  $\pi$ .

**Punti (2+4+3+2)**

2. Sia  $A$  una matrice  $3 \times 3$  reale della forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Supponiamo che il sottospazio  $W$  di equazione  $x + y = 0$  sia un autospazio di  $A$ .

- (a) Qual'è il rango di  $A$ ?
- (b) Mostrare che  $A$  è diagonalizzabile oppure nilpotente.
- (c) Fare un esempio di una matrice di questa forma diagonalizzabile, e di una nilpotente.
- (d) Supponendo che  ${}^t(1, 1, 0)$  sia un autovettore per  $A$ , determinare  $a, b, c, d, e$  ed  $f$ .

**Punti (3+3+2+3)**

3. Sia  $A$  una matrice  $2 \times 2$  reale.

- (a) Mostrare che, se  $A^2 + I = 0$ , allora  $A$  è simile a

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Si supponga che  $A^3 + A = 0$ , e che  $A$  non sia simile a  $C$ . Determinare  $A$ .
- (c) Si supponga che  $A^4 + 2A^2 + I = 0$ . Dire se  $A$  è simile a  $C$  o no.

**Punti (3+3+2)**

%%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome e cognome dello studente. Sul primo foglio va indicato il corso di laurea (Matematica o Fisica), e se si tratta di laurea triennale o quadriennale.