Corso di Algebra lineare - a.a. 2004-2005

Prova scritta del 27.6.2005 – soluzioni

Compito **A**

1. (a) Il raggio di S è la distanza tra Q e B, cioè 3. Perciò una possibile equazione cartesiana di S è

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

(b) Una possibile equazione parametrica per la retta richiesta è $(1,1,3) + (1,-2,-2)t$, da cui si ricavano facilmente equazioni cartesiane come

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ y - z = -2 \end{cases}.$$

Un'equazione cartesiana per il piano π è ad esempio

$$x - 2y - 4z = 0.$$

(c) La distanza di Q da π risulta $\dfrac{13}{\sqrt{21}}$. Per determinare le coordinate di P intersechiamo con π la retta per Q ortogonale a π, che ha giacitura generata ad esempio dal vettore $(1,-2,-4)$, ottenendo che P ha coordinate

$$\left(\frac{34}{21}, -\frac{5}{21}, \frac{11}{21}\right).$$

(d) Poiché il punto B deve appartenere alla circonferenza intersezione, il raggio deve essere la distanza di P da B, cioè

$$\sqrt{\frac{20}{21}};$$

allo stesso risultato si arriva utilizzando il teorema di Pitagora per il triangolo QPB, rettangolo in P.

2. (a) Per ipotesi, esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $A^t(1,0,-1) =^t (\alpha, 0, -\alpha)$. Poiché la prima coordinata del vettore $A^t(1,0,-1)$ è 0, deve essere $\alpha = 0$. Allo stesso modo si verifica che il vettore ${}^t(1,-1,0)$ deve essere associato all'autovalore 0. Dunque ${}^t(1,0,-1)$ e ${}^t(1,-1,0)$ sono due vettori indipendenti che appartengono a $\ker A$. Poiché A non è la matrice nulla, concludiamo che il suo rango è 1.

(b) Applicando l'ipotesi, o usando il punto precedente, si vede che A deve essere della forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & a \\ b & b & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Il suo polinomio caratteristico è $p(x) = \det(xI - A) = x^2(x - (a+b+1))$. Dunque, per la condizione di diagonalizzabilità, A è diagonalizzabile se e solo se $a \neq -b-1$, A è nilpotente se solo se $a = -b-1$.

(c) Come si vede dal punto precedente, o si può verificare direttamente, possibili esempi di A diagonalizzabile e rispettivamente nilpotente sono:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Chiamiamo V_α questo autospazio. Un generatore per V_α è ${}^t(1,1,1)$. Scrivendo A come nel punto (b), e imponendo che ${}^t(1,1,1)$ sia un autovettore associato all'autovalore $\alpha \in \mathbb{R}$, otteniamo la condizione ${}^t(3, 3a, 3b) = {}^t(\alpha, \alpha, \alpha)$. Dunque deve essere $\alpha = 3$ e $a = b = 1$.

3. (a) Se λ è un autovalore di A, vista come matrice complessa, allora $\lambda^2 = -1$, e quindi $\lambda = \pm i$. Inoltre, poiché A è reale, il suo polinomio caratteristico è reale; quindi sia i che $-i$ sono autovalori di A. Sia V un vettore colonna che è autovettore di A con autovalore i. Passando ai coniugati nell'identità $AV = iV$, e ricordandosi che A è reale, si ottiene $A\overline{V} = i\overline{V}$, dove $\overline{V}$ è il vettore colonna ottenuto da V rimpiazzando ogni suo elemento con il coniugato. Poniamo poi $U = V + \overline{V}$ e $W = iV - i\overline{V}$. I vettori U e W coincidono con i propri coniugati e sono quindi reali; dunque la matrice $M = (W, U)$ è reale. Inoltre $AU = W$ e $AW = -U$. In altre parole, $AM = (-U, W)$, cioè

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Il polinomio minimo di A divide $X^3 + X$, che ha radici semplici. Quindi il polinomio minimo di A ha anch'esso radici semplici, e A è diagonalizzabile sui complessi. Gli autovalori di A possono essere $\pm i$ e 0. Se i (o $-i$) fosse un autovalore, anche $-i$ (o i) lo sarebbe, dato che A è reale. In questo caso $A^2 = -I$, e dunque A sarebbe simile a B, come si è mostrato sopra. L'ipotesi implica dunque che il solo autovalore di A è 0. Poiché A è diagonalizzabile, è la matrice nulla.

(c) Gli autovalori di A sono radici di $X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2$, cioè sono uguali a $\pm i$. Dato che A è reale, e quindi il suo polinomio caratteristico è reale, sia i che $-i$ sono autovalori di A. Dunque A ha due autovalori distinti, ed è perciò diagonalizzabile. Ne segue che $A^2 = -I$, e quindi che A è simile a B, per il punto (a).

Compito **B**

1. (a) Il raggio di S è la distanza tra Q e B, cioè 3. Perciò una possibile equazione cartesiana di S è

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

(b) Una possibile equazione parametrica per la retta richiesta è $(2, 1, 3) + (1, 2, 2)t$, da cui si ricavano facilmente equazioni cartesiane come

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ y - z = -2 \end{cases}.$$

Un'equazione cartesiana per il piano π è ad esempio

$$x - y - 2z = 0.$$

(c) La distanza di Q da π risulta $\dfrac{5}{\sqrt{6}}$. Per determinare le coordinate di P intersechiamo con π la retta per Q ortogonale a π, che ha giacitura generata ad esempio dal vettore $(1, -1, -2)$, ottenendo che P ha coordinate

$$\left(\frac{17}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right).$$

(d) Poiché il punto B deve appartenere alla circonferenza intersezione, il raggio deve essere la distanza di P da B, cioè

$$\sqrt{\frac{29}{6}};$$

allo stesso risultato si arriva utilizzando il teorema di Pitagora per il triangolo QPB, rettangolo in P.

2. (a) I vettori ${}^t(1, -1, 0)$ e ${}^t(0, 0, 1)$ sono una base per W. Imponendo che siano autovettori di A, associati a un autovalore $\alpha \in \mathbb{R}$, otteniamo le condizioni

$${}^t(0, a - b, d - e) = A\,{}^t(1, -1, 0) = {}^t(\alpha, -\alpha, 0),$$

$${}^t(0, c, f) = A\,{}^t(0, 0, 1) = {}^t(0, 0, \alpha).$$

Deduciamo che $\alpha = 0$, dunque $W \subseteq \ker A$. Poiché A non è la matrice nulla, concludiamo che il suo rango è 1.

(b) Applicando l'ipotesi, o usando il punto precedente, si vede che A deve essere della forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & a & 0 \\ d & d & 0 \end{pmatrix}, \quad a, d \in \mathbb{R}.$$

Il suo polinomio caratteristico è $p(x) = \det(xI - A) = x^2(x - (a + 1))$. Dunque, per la condizione di diagonalizzabilità, A è diagonalizzabile se e solo se $a \neq -1$, A è nilpotente se solo se $a = -1$.

(c) Come si vede dal punto precedente, o si può verificare direttamente, possibili esempi di A diagonalizzabile e rispettivamente nilpotente sono:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Scriviamo A come nel punto (b). Imponendo che ${}^t(1,1,0)$ sia un autovettore per A, associato a un certo autovalore $\alpha \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$ {}^t(2, 2a, 2b) = A\,{}^t(1,1,0) = {}^t(\alpha, \alpha, 0), $$

dunque $\alpha = 2$, $a = 1$, $b = 0$.

3. (a) Se λ è un autovalore di A, vista come matrice complessa, allora $\lambda^2 = -1$, e quindi $\lambda = \pm i$. Inoltre, poiché A è reale, il suo polinomio caratteristico è reale; quindi sia i che $-i$ sono autovalori di A. Sia V un vettore colonna che è autovettore di A con autovalore i. Passando ai coniugati nell'identità $AV = iV$, e ricordandosi che A è reale, si ottiene $A\overline{V} = i\overline{V}$, dove $\overline{V}$ è il vettore colonna ottenuto da V rimpiazzando ogni suo elemento con il coniugato. Poniamo poi $U = V + \overline{V}$ e $W = iV - i\overline{V}$. I vettori U e W coincidono con i propri coniugati e sono quindi reali; dunque la matrice $M = (U, W)$ è reale. Inoltre $AU = W$ e $AW = -U$. In altre parole, $AM = (W, -U)$, cioè

$$ M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} $$

(b) Il polinomio minimo di A divide $X^3 + X$, che ha radici semplici. Quindi il polinomio minimo di A ha anch'esso radici semplici, e A è diagonalizzabile sui complessi. Gli autovalori di A possono essere $\pm i$ e 0. Se i (o $-i$) fosse un autovalore, anche $-i$ (o i) lo sarebbe, dato che A è reale. In questo caso $A^2 = -I$, e dunque A sarebbe simile a C, come si è mostrato sopra. L'ipotesi implica dunque che il solo autovalore di A è 0. Poiché A è diagonalizzabile, è la matrice nulla.

(c) Gli autovalori di A sono radici di $X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2+1)^2$, cioè sono uguali a $\pm i$. Dato che A è reale, e quindi il suo polinomio caratteristico è reale, sia i che $-i$ sono autovalori di A. Dunque A ha due autovalori distinti, ed è perciò diagonalizzabile. Ne segue che $A^2 = -I$, e quindi che A è simile a C, per il punto (a).