

Corso di Algebra lineare - a.a. 2003-2004

Prova scritta del 22-9-2004

1. Sia $Oxyz$ un riferimento ortonormale in uno spazio euclideo reale di dimensione 3. Sia π il piano di equazione $2x + y - 2z + 2 = 0$.
 - (a) Verificare che il punto $P = (2, -2, 2)$ appartiene al piano, che il vettore $v = (-1, 4, 1)$ appartiene alla giacitura di π e scrivere equazioni cartesiane per la retta r di vettore direttore v e passante per P ;
 - (b) scrivere un'equazione parametrica per la retta s perpendicolare a π e passante per P e un'equazione cartesiana per il piano π' perpendicolare a π e contenente la retta r (ricordiamo che due piani sono perpendicolari se lo sono i rispettivi vettori normali);
 - (c) sia Q_t il punto di coordinate $(3, t, 2)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$: calcolare la distanza tra Q_t e π e quella tra Q_t e π' . Esistono sfere con centro in qualche Q_t e tangenti a π e a π' ? Se sì, quante?

Punti (3+4+4)

2. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ sia $f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f_k(x, y, z) = (2x + y + kz, (2k - 2)y, 4x + 2y + (k + 2)z)$$

- (a) Determinare basi dell'immagine e del nucleo di f_k , al variare del parametro reale k .
- (b) Sia $B_k = {}^t(2k + 1, k - 1, 2k + 6)$. Detta A_k la matrice rappresentativa dell'applicazione f_k rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 , studiare la risolubilità del sistema lineare

$$A_k \cdot X = B_k$$

al variare del parametro reale k .

- (c) Si determini se l'applicazione lineare f_0 è diagonalizzabile, e se ne trovino autovalori e autospazi.

Punti (4+4+4)

3. Sia A una matrice complessa $n \times n$ tale che $A^3 = A^2$.

- (a) Trovare i possibili autovalori di A .
- (b) Mostrare con un esempio che A non è necessariamente diagonalizzabile.
- (c) Mostrare che A^2 è sempre diagonalizzabile.
- (d) Mostrare che, se A è invertibile, allora $A = I$; mostrare anche che, se A^2 ha rango $n - 1$, allora A è diagonalizzabile.

Punti (1+2+2+2)

%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome e cognome dello studente. Sul primo foglio va indicato il corso di laurea (Matematica o Fisica), e se si tratta di laurea triennale o quadriennale.